Электронная техника, 1993, Сер. 10, № 1,2, с. 3-35

СИНТЕЗ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ В ОБЛАСТИ ДИСКРЕТНЫХ ЗНАЧЕНИЙ КОЭФФИЦИЕНТОВ
(Обзор)

А. Т. Мингазин

В данном варианте обзора автором устранены замеченные опечатки и выполнена незначительная коррекция в вводной части и в выводах. Скорректированные предложения набраны курсивом. Для удобства представлено оглавление. Апрель, 2003 г., июнь, 2005. E-mail: alexmin@orc.ru

Оглавление

0-1 программирование
Локальный поиск
Неявный перебор
Вариация исходных параметров
Имитация процесса отжига

- Уменьшение числа ненулевых бит

  Методы ЦЛП
  Метод ЦКП
  Методы ветвей и границ
  0-1 программирование
  Локальный поиск
  Имитация процесса отжига

Выводы

Литература

Обзор посвящен проблеме синтеза передаточных функций в области дискретных значений коэффициентов применительно к одномерным цифровым фильтрам с бесконечной и конечной импульсной характеристикой. В рамках данной проблемы рассмотрены такие важные для практики задачи, как оптимизация характеристик фильтров, минимизация длины слова коэффициентов передаточной функции, ограничение числа ненулевых бит в канонических знакоразрядных кодах коэффициентов, минимизация суммарного числа таких бит, уменьшение уровня шума округления на выходе фильтров. Внимание сосредоточено на особенностях решения перечисленных задач методами математического программирования, оригинальных алгоритмах, получаемых результатах и наблюдениях, сделанных многими исследователями.

Введение

Цифровая фильтрация, как один из способов обработки сигналов, получила широкое распространение в различных областях техники, таких как связь, радиолокация, радиотехнические измерения, звукозапись, телевидение, биомедицинские исследования и др. Цифровые фильтры (ЦФ) имеют ряд преимуществ по сравнению с аналоговыми по точности, стабильности, гибкости перестройки, повторяемости и легкости тестирования после изготовления. Кроме того, они не требуют настройки и могут иметь строго линейные ФЧХ. *Элементная база ЦФ - микроконтроллеры, сигнальные процессоры, ПЛИС и заказные СБИС.* В настоящее время максимальные частоты дискретизации для ЦФ на основе заказных КМОП СБИС достигают 200 МГц.

Дальнейшее развитие элементной базы, связанное с применением новых технологий изготовления интегральных схем, является важным фактором на пути расширения области рабочих частот, снижения потребляемой мощности и улучшения качества аппаратуры цифровой фильтрации, работающей в реальном масштабе времени. С другой стороны, эти характеристики аппаратуры, а также ее сложность и стоимость сильно зависят от разрядностей (длины слов) обрабатываемых данных и используемых констант. Ограничение длины слов приводит к эффектам конечной разрядности или иначе эффектам квантования. Так, из-за округления результатов арифметических операций в ЦФ возникают шумы и паразитные колебания (в рекурсивных ЦФ), называемые малыми предельными циклами. Из-за ограничения длины слова констант (коэффициентов передаточной функции), характеристики ЦФ, такие, как например АЧХ и ФЧХ, могут стать неудовлетворительными. Кроме того, в ЦФ, особенно при оперировании с числами, представленными в форме с фиксированной запятой, возможны переполнения разрядной сетки. В случае рекурсивной фильтрации это может привести к возникновению колебаний переполнения (больших предельных циклов) и полной потере работоспособности аппаратуры.

Стремление уйти от всех этих проблем ценой наращивания разрядностей (умножителей, сумматоров, регистров), использования обработки чисел с плавающей запятой и новых технологий, увеличивающих степень интеграции и быстродействие цифровых логических элементов, приводит к значительному повышению стоимости аппаратуры.

В связи с этим упомянутые длины слов необходимо выбирать по возможности малой, но достаточной величины, чтобы удовлетворить тем или иным требованиям к ЦФ. В тех случаях, когда длины слов данных и коэффициентов заданы, возникает задача минимизации уровней шума и паразитных колебаний (или даже полного устранения последних) при одновременном получении наилучших (или, по крайней мере, приемлемых) характеристик ЦФ по выбранному критерию. Другим подходом, направленным на упрощение аппаратурной реализации ЦФ, уменьшение ее стоимости и повышение быстродействия, является отказ от выполнения полных операций умножения, замена их операциями сдвиг/суммирование и решение задач получения приемлемых характеристик ЦФ при заданном числе ненулевых бит в двоичном представлении коэффициентов либо при одновременной минимизации суммарного числа таких бит.

Решение всех этих задач тесно связано с синтезом как передаточной функции в области дискретных (или иначе квантованных) значений коэффициентов, так и структуры ЦФ. Желательно было бы выполнить эти два этапа одновременно. Однако пока такой подход не разработан. Это обусловлено тем, что названные этапы сами по себе являются весьма сложными и не полностью вышли за рамки исследований.

Данный обзор посвящен синтезу передаточных функций в области дискретных значений коэффициентов для заданных структур одномерных ЦФ с бесконечной и конечной импульсной характеристикой (БИХ- и КИХ-фильтры).

Очевидным подходом к решению этой задачи является метод простого округления, согласно которому сначала решается задача в непрерывной области, а затем полученные коэффициенты округляются до требуемой длины слова либо до длины, при которой характеристики ЦФ считаются еще допустимыми. Другой простой подход заключается в полном переборе возможных дискретных значений коэффициентов. Это единственный метод, гарантирующий получение глобально оптимального решения задачи дискретного нелинейного программирования.

Первый метод очень часто приводит к неоптимальным решениям, а второй - не пригоден из-за чрезмерных затрат машинного времени, особенно для ЦФ средних и высоких порядков. В связи с этим были предприняты большие усилия, направленные на разработку эффективных алгоритмов, приводящих к оптимальным решениям или близким к таковым за приемлемое время.

Анализ литературы показывает, что около ста исследователей разных стран мира посвятили этой проблеме свои публикации [1-92], а многие из них выполнили диссертационные работы. Тем не менее накопленный более чем двадцатилетний опыт не нашел достаточного отражения в известных монографиях и обзорах по цифровой фильтрации и обработке сигналов, что затрудняет использование его на практике или в дальнейших исследованиях.

Упомянутая проблема синтеза связана с решением задач дискретного нелинейного или линейного программирования, каждая из которых может быть легко преобразована в задачу с целочисленными или 0-1 (булевыми) переменными оптимизации. Многие методы решения перечисленных задач широко известны и применяются как в случаях с дискретными, так и непрерывными переменными.

В данном обзоре не ставится цель детального описания этих методов. О них, с той или иной степенью подробности, можно прочитать в литературе, где отражены вопросы аппроксимации характеристик аналоговых и цифровых фильтров, например в [41, 93-96], и в литературе по математическому программированию, например в [97-100]. Здесь же внимание сосредоточено прежде всего на особенностях решения обсуждаемой проблемы, оригинальных алгоритмах, результатах, которые могут быть достигнуты, и затратах, связанных с их получением. Это позволит специалистам и начинающим лучше ориентироваться в интересной и важной для теории и практики цифровой фильтрации области.

Критерии оптимальности решений

Критерий p-ошибки. Для решения задачи синтеза передаточной функции ЦФ используется критерий p-ошибки, хорошо известный из теории аппроксимации характеристик электрических цепей. Согласно этому критерию, минимизации подлежит ошибка (целевая функция) вида

$$e_p = \{\sum_i \left| W(\xi_i)[Y(C,\xi_i) - D(\xi_i)] \right|^p\}^{1/p}, \qquad (1)$$

где Y(·) и D (·)- аппроксимирующая и желаемая функции, соответственно; C - искомый вектор коэффициентов передаточной функции ЦФ, ξ_i - значение независимой переменной ξ (частоты или времени), W( )- весовая функция; p-положительное число.

Функции Y(·) и D(·) могут быть частотными характеристиками (АЧХ, ФЧХ и ГВП), выходными временными реакциями (например, импульсная или переходная характеристика) или даже комбинациями частотных и/или временных или других характеристик. Очень часто W(·) и D(·) задаются как кусочно-постоянные функции. В частности, при аппроксимации АЧХ функция W(·) несет информацию об уровне пульсаций АЧХ в полосах пропускания, где D(·)=1, и задерживания, где D(·)=0.

Наиболее часто используется минимаксный критерий (p=∞ в (1)) и критерий наименьших квадратов (p=2 в (1)). В первом случае минимизации подлежит максимальная ошибка

$$e_\infty = \max_{\xi_i} \left| \; W(\xi_i)\,[Y(C,\xi_i) - D(\xi_i)] \; \right|,$$

а во втором - среднеквадратическая ошибки e_2.

При практической реализации ЦФ компоненты вектора С могут принимать только дискретные значения. Обычно для их представления используется двоичный код с фиксированной запятой. Длине слова дробной части коэффициентов, равной М, соответствует шаг квантования коэффициентов $q = 2^{-M}$.

Для некоторых реализаций ЦФ желательно уменьшить число ненулевых бит (т. е. +1 или -1) в двоичном представлении коэффициентов. В этом случае широко используют канонический знакоразрядный код (КЗРК). Как известно, применение этого кода позволяет уменьшить число ненулевых бит примерно в 1,5 раза. Часто вводят дополнительное ограничение на максимальное число ненулевых бит в КЗРК коэффициентов. Такое ограничение эквивалентно представлению с неравномерным шагом квантования. Коэффициенты, содержащие один, два и три ненулевых бита, иногда называют коэффициентами, равными степени числа два, сумме или разности двух и трех степеней числа два.

Вектор дискретных коэффициентов будем обозначать как C^*, независимо от вида квантования. Имеется два принципиальных различия в решении задачи аппроксимации с непрерывными и дискретными коэффициентами.

В первом случае выражение для Y(·) может не нести информации о структуре ЦФ, в то же время учет квантования предполагает, что структура уже выбрана и Y(') обязательно выражена через искомый вектор коэффициентов.

При поиске решения с непрерывными коэффициентами функции D(·), W(·) могут быть заменены на AD(·), W(·)/A, т. е. промасштабированы. Здесь A-произвольное действительное число. Очевидно, что минимизация р-ошибки будет приводить к одному и тому же результату при любых А. В то же время значение р-ошибки для решения с квантованными коэффициентами зависит от А, что особенно проявляется при большом шаге квантования или при неравномерном квантовании с малым числом ненулевых бит.

Приведем соотношения для р-ошибки, которые представляют интерес при поиске решений в области дискретных значений коэффициентов

$$\widetilde{e}_p = \{\sum_i \left| \; W(\xi_i)[\widetilde{Y}(C^*,\xi_i)/\widetilde{A} - D(\xi_i)] \; \right|^p\}^{1/p}, \qquad (2)$$

и

$$\widetilde{e}'_p = \{\sum_i \left| \; W(\xi_i)[\widetilde{Y}(C^*,\xi_i) - AD(\xi_i)] \; \right|^p\}^{1/p}. \qquad (3)$$

Здесь и далее знак $\approx$ означает соответствие квантованным коэффициентам.

Проблемы масштабирования при получении АЧХ, оптимальных в минимаксном смысле ($p = \infty$), рассмотрены в [32, 62, 78, 90, 92]. Параметр A называют средним значением усиления (или, для краткости, просто усилением) ЦФ в полосе пропускания [78, 90]. При минимизации $\widetilde{e}_\infty$ усиление $\widetilde{A}$ в полосе пропускания не контролируется, но при этом минимизируются относительные уровни пульсаций АЧХ в полосе пропускания и задерживания. В процессе минимизации $\widetilde{e}'_\infty$ усиление $\widetilde{A}$ контролируется, но минимизируются абсолютные уровни пульсаций в указанных полосах. При этом решения с малыми относительными уровнями будут отбрасываться. В [90] это очень наглядно проиллюстрировано для КИХ- фильтра.

Поскольку более важен относительный уровень пульсаций, чем усиление, то предпочтительнее минимизировать $\tilde{e}_\infty$, а не $\tilde{e}'_\infty$. Для БИХ-фильтров так обычно и поступают. Тем более, что проблема масштабирования для этих ЦФ в общем случае не является тривиальной, т. е. не сводится к простому контролю $\tilde{A}$. Для КИХ-фильтров применяют оба критерия. Дело в том, что минимизация $\tilde{e}'_\infty$ в отличие от $\tilde{e}_\infty$ может быть выполнена хорошо разработанными методами целочисленного линейного программирования (ЦЛП). Это особенно оправдано, когда квантование коэффициентов не приводит к значительному отличию $\tilde{A}$ от A.

Процесс минимизации p-ошибки связан с многократными оценками ее на дискретном множестве значений ξ_i. Очевидно, чем большее число точек берется для этого, тем точнее будет выполнена аппроксимация. Однако при этом сильно растет общее время расчета на ЭВМ, необходимое для получения окончательного решения. Применительно к БИХ-фильтрам для уменьшения числа точек используется неравномерное их распределение. В [24] предлагается распределять точки более плотно в районе границ полос пропускания и задерживания, а в [30] - сосредоточивать их в окрестностях известных частот максимумов, минимумов и на граничных частотах АЧХ, соответствующих непрерывным коэффициентам, в предположении, что квантование последних не сильно смещает экстремумы АЧХ. Для КИХ-фильтров выбор числа равномерно распределенных точек связывают с порядком передаточной функции N. Например, для ЦФ с линейной ФЧХ при четном N и симметричной импульсной характеристике это число равно 8N. С проблемой выбора числа точек в случае синтеза КИХ-фильтров можно ознакомиться в [101], где даны некоторые рекомендации.

Часто в целях сокращения времени вычисления стремятся получить лишь допустимое или иначе приемлемое решение, а не наилучшее. Это снижает общее число оценок. Для ЦФ со стандартными требованиями к АЧХ, таких как фильтры нижних и верхних частот (ФНЧ и ФВЧ), полосовые и режекторные фильтры (ПФ и РФ), получение допустимого решения означает выполнение условия

$$\tilde{e}_\infty \le 1 \qquad (4)$$

или условий

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{a} &\le \Delta a_{\max} \\ \tilde{a}_0 &\ge a_{0\min} \end{aligned} \qquad (5)$$

Здесь $\Delta\tilde{a}$ - неравномерность АЧХ в полосе пропускания и $\tilde{a}_0$ -относительное ослабление АЧХ в полосе задерживания, а $\Delta a_{\max}$ и $a_{0\min}$ - их предельно допустимые значения. Через $a_{0\min}$ и $\Delta a_{\max}$ можно выразить весовую функцию в (2) или (3). Предполагается, что введенные в (5) параметры выражены в децибелах, а $\Delta\tilde{a}$ и $\tilde{a}_0$, также как и $\tilde{e}_\infty$, оцениваются на дискретном наборе частот.

Использование нижеприведенных критериев оптимизации предполагает проводить контроль решений на допустимость.

Длина слова коэффициентов. Минимизации подлежит длина слова дробной части коэффициентов M (точнее ее максимальное значение, так как в некоторых коэффициентах младшие биты могут оказаться нулевыми), что эквивалентно максимизации шага квантования q. Решение этой задачи связано с итеративным поиском приемлемого решения для различных значений M, начиная с некоторого исходного. Часто также пользуются определением длины слова, учитывающим биты целой части коэффициентов и знаковый бит.

Эффект от решения этой задачи зависит от того, имеется ли в наличии аппаратура для выполнения цифровой фильтрации или ее предстоит разработать. Так, например, уменьшение M на 1 бит может привести к 50%-ной экономии памяти для хранения коэффициентов либо дать возможность использовать имеющиеся аппаратные средства без нарушения заданных требований к характеристикам ЦФ. В то же время в другой ситуации уменьшать М даже на 3 бита будет нецелесообразно, поскольку это не дает экономии и лишь ухудшает характеристики. Для вновь разрабатываемых ЦФ на основе заказных СБИС, по-видимому, желательно уменьшение М настолько, насколько возможно.

Суммарное число ненулевых бит. Пусть коэффициенты представлены в виде

$$C_i^* = \sum_{m=0}^{M} \alpha_{i,m} 2^{-m} ,$$

где $\alpha_{i,m}$ = {-1, 0,1}-m-й бит C_i^*, и минимизации подлежит функция вида [76]

$$F(C^*) = \sum_i F(C_i^*) , \qquad (6)$$

где $F(C^*) = \sum_{m=1}^{M} | \alpha_{i,m} |$, а верхний предел суммирования в (6) определяется размерностью C^*.

В данном случае минимизируется суммарное число ненулевых бит в дробной части всех компонентов вектора C^*, хотя могут быть учтены и биты целой части.

Решение сформулированной задачи приводит к уменьшению размеров программ фильтрации и увеличению скорости их выполнения в сигнальных процессорах, в которых умножение переменных на константы выполняется с помощью операций сдвиг/суммирование, или к сокращению числа сумматоров в ЦФ, реализуемых по жесткой логике в виде заказных СБИС, что позволяет экономить площадь кристалла. Очевидно, в этом смысле минимизация F предпочтительнее поиска решения ранее упомянутой задачи при ограниченном числе ненулевых бит в каждом коэффициенте.

Шум округления. Шум на выходе ЦФ, обусловленный округлением результатов арифметических действий, оценивается по его энергетическому спектру $\widetilde{W}(f, C^*)$. В этом случае можно определить $\max_f \widetilde{W}(f, C^*)$ или дисперсию $\widetilde{\sigma}^2 = \|\widetilde{W}\|_1$ и поиск вектора коэффициентов C^* ориентировать на получение минимума одной из этих функций. Здесь $\| \, \|_1$ означает L_1-норму. Предполагается, что полезный сигнал в узлах суммирования ЦФ поддерживается на требуемом уровне. Это осуществляется введением в структуру ЦФ масштабных множителей, которые иногда выбираются равными степени два. Поскольку квантование коэффициентов (включая масштабные множители) влияет на уровень полезного сигнала, то желательно минимизировать отношение шум/сигнал.

Начальные приближения

Эффективность тех или иных алгоритмов оптимизации, а именно число итераций, время вычисления на ЭВМ и близость получаемых результатов к глобальному оптимуму, сильно зависит от того, насколько удачно выбрано начальное приближение, т. е. исходный вектор искомых параметров. Специфика поиска приближения заключается в том, что при этом необходимо хорошее понимание той области, для которой применяются методы математического программирования [96]. С одной стороны, при удачном выборе исходного решения можно обходиться более простыми алгоритмами оптимизации или, даже не использовать их вообще. С другой стороны, хорошо было бы иметь быстрые и надежные алгоритмы, нечувствительные к такому выбору. Однако при поиске глобальных решений нелинейных задач, по-видимому, не обойтись без применения хороших начальных приближений и последующего применения дополнительной оптимизации. Такой путь является, по крайней мере, более надежным.

При решении обсуждаемых в данном обзоре задач начальный вектор квантованных коэффициентов или даже набор таких векторов задается случайно либо отправной точкой для этого является аналитическое или численное решение аппроксимационной задачи в области непрерывного изменения коэффициентов. Применительно к КИХ-фильтрам используются численные методы решения задачи аппроксимации (такие, как алгоритм замены Ремеза или линейное программирование [41, 95]), а применительно к БИХ-фильтрам-как аналитические, так и численные методы. Аналитические методы основываются на синтезе передаточной функции ЦФ по аналоговому фильтру-прототипу с характеристиками Золотарева-Кауэра (эллиптические фильтры), Чебышева, Баттерворта и др. Переход от прототипа к ЦФ осуществляется, как правило, с помощью билинейного преобразования.

Ввиду того, что порядок передаточной функции ЦФ определяется всегда таким образом, чтобы удовлетворить с некоторым запасом заданным требованиям, предъявляемым к АЧХ, существует целый ряд допустимых решений с непрерывными коэффициентами. Поэтому возникает проблема выбора подходящего решения с целью получения хорошего начального приближения. В частности, одним из таких решений считается минимаксное, которое используется в большинстве случаев как при синтезе БИХ-, так и КИХ-фильтров. Ниже применительно к БИХ-фильтрам описаны два других метода решения этой проблемы.

Минимум статистической длины слова. Данный метод предложен в [11] и основывается на получении минимума статистической длины слова коэффициентов C_i для конкретной реализации ЦФ. Предполагается, что ошибки квантования коэффициентов ΔC_i независимы, распределены равномерно в интервале -q/2..+q/2, имеют нулевое среднее значение и дисперсию $q^2/12$. При допущении, что распределение ошибки АЧХ, вызванной квантованием, является гауссовым и задан допуск на отклонение АЧХ, выводится выражение (уточняющее ранее полученное в [6]) для статистической длины слова коэффициентов. Далее ставится задача нахождения минимума этой длины слова. При этом используется идея выравнивания статистических длин слова, необходимых для полосы пропускания, задерживания и на каждой из границ полос. (В [18] аналогичная идея использована применительно к КИХ-фильтрам). Для аналитических типов аппроксимаций, упомянутых выше, это позволяет свести задачу минимизации статистической длины к решению нелинейного уравнения относительно некоторой фиктивной переменной, однозначно связанной с параметрами АЧХ, такими как $\Delta a, a_0$ и граничные частоты f_1 и f_2 полос пропускания и задерживания. По значениям этих параметров, соответствующих глобально минимальной статистической длине, рассчитываются непрерывные коэффициенты для использования их округленных значений в качестве начальных.

При минимизации реальной длины слова коэффициентов М важным моментом является выбор ее начального значения. В [11] предложено в качестве такового использовать значение минимальной статистической длины слова.

На примере каскадного ФНЧ 6-го порядка показано, что благодаря применению статистического подхода и метода простого округления значение М удается уменьшить на 3 бита. Предложенный метод, однако, не гарантирует получение глобального минимума М. Это проиллюстрировано на примере ПФ 8-го порядка, для которого статистический метод дает улучшение на 1 бит, а алгоритм дискретного нелинейного программирования [6] приводит к улучшению в 3 бита.

Высказанное в [11] предположение о том, что статистический метод в сочетании с процедурой дискретного программирования может давать хорошие результаты, подтверждено в [30, 31] и не подтверждено в [23], где отмечено, что использование в качестве начального решения минимаксного дает лучшие результаты.

Метод областей и доминирующих особенностей. Данный метод получения начальных приближений был предложен в [58] и предполагает аналитическое решение задачи аппроксимации. Хотя метод описан для каскадных ФНЧ, он может быть распространен и на другие типы ЦФ.

Исходя из требований к АЧХ вводятся в рассмотрение области допустимых параметров (S') ЦФ Баттерворта, Чебышева, инверсных Чебышева и Золотарева-Кауэра. Эти области при заданном порядке передаточной функции N определяют исчерпывающие наборы параметров ($(\Delta a, a_0, f_1, f_2)$, расчет по которым приводит к выполнению условий (5) без учета в них квантования коэффициентов. В зависимости от применяемой аппроксимации эти области определяются одним, двумя или тремя параметрами.

Начальным приближениям соответствуют определенные точки области S', которые выбираются таким образом, чтобы квантование коэффициентов, рассчитанных по координатам этих точек, не приводило к смещению доминирующей особенности передаточной функции H(z) в z-плоскости. При этом начальный шаг квантования $q = q_{\max}$ (соответствующий начальной длине слова $M = M_{\min}$) выбирается так, чтобы после квантования рассчитанных коэффициентов при $q = q_{\max}$ в области имелась хотя бы одна из упомянутых точек, а при $q > q_{\max}$ они отсутствовали. Под доминирующей понимается особенность (нуль, полюс или, в зависимости от типа аппроксимации, полюсно-нулевая пара H(z)), наиболее сильно влияющая на АЧХ ЦФ.

Таким образом, этот метод в отличие от предыдущего приводит к нескольким начальным приближениям и, в частности, к одному. Их количество зависит от конкретных требований к АЧХ.

Величина $q_{\max}$ находится с помощью итераций, начиная с $q = 2^{-1}, 2^{-2}$ и т. д. Однако при этом не требуется проводить оценки (4) или (5) на дискретном множестве значений частот.

Для ЦФ Чебышева и Золотарева-Кауэра получены соотношения для определения координат точек в S'.

Установлено, что при N = 2 существуют ЦФ Чебышева и Золотарева-Кауэра с передаточными функциями, коэффициенты которых квантованы. В этом случае предложенный метод позволяет сразу, не прибегая к дополнительной оптимизации, получить решение с глобально минимальной длиной слова коэффициентов, что не гарантируется другими методами расчета.

Заметим, что при N > 2 ЦФ Чебышева и Золотарева-Кауэра, а при N >= 2 Баттерворта и инверсные Чебышева, строго говоря, нельзя называть таковыми после того, как коэффициенты их передаточных функций подвергались квантованию.

В [65, 89] метод положен в основу графического расчета ЦФ второго порядка, позволяющего быстро определять квантованные коэффициенты и глобально минимальное значение M. В [65] приведена номограмма для ФНЧ и ФВЧ Чебышева, а в [89]- номограммы для ПФ и РФ.

В [75] для семи ФНЧ с N = 4, 6, 8, 10, требования для которых взяты из публикаций разных авторов, продемонстрирована высокая эффективность обсуждаемого метода определения начальных приближений. Установлено, что различие коэффициентов, соответствующих начальному приближению и оптимальному решению, составляет 0-3q. В то же время применение других методов расчета приводит к различию вплоть до 8q, что говорит о низком качестве применяемых начальных приближений. Для четырех примеров ЦФ начальные приближения сами по себе являются допустимыми решениями. В трех из них M оказалось меньше на 1 бит по сравнению со значениями, полученными алгоритмами дискретного программирования, требующими большого числа оценок $\tilde{e}_\infty$ (или $\Delta\tilde{a}$ и $\tilde{a}_0$).

В [87] показано, что использование других особенностей, т. е. не только доминирующих, позволяет иногда несколько улучшить решение.

Синтез передаточных функций БИХ-фильтров

Анализ публикаций показывает, что в рамках проблемы синтеза передаточных функций БИХ-фильтров в области дискретных значений коэффициентов интерес представляют задачи оптимизации

АЧХ, минимизации длины слова коэффициентов и уменьшения числа ненулевых бит в представлении коэффициентов. Кроме того, сделаны некоторые шаги в изучении проблемы оптимизации временных характеристик и минимизации уровня шума округления. Целесообразность решения этих задач продемонстрирована для каскадных (на основе звеньев прямой формы второго порядка), волновых, параллельных и прямых структур ЦФ.

Существующие алгоритмы синтеза, речь о которых пойдет ниже, основываются на методах прямого, случайного, локального поиска, неявного перебора, ветвей и границ, дискретно-непрерывной оптимизации, ЦЛП, вариации исходных параметров и имитации процесса отжига.

Минимизация длины слова коэффициентов и оптимизация характеристик

При оптимизации характеристик ЦФ (обычно АЧХ) стремятся определить минимум ошибки вида (2) или (3) при $A = 1$, либо найти допустимое решение, удовлетворяющее условиям (4) или (5). Алгоритмы решения этих задач используются также в качестве базовых при минимизации длины слова коэффициентов М. Прежде чем познакомиться с этими алгоритмами, рассмотрим возможные подходы к проблеме минимизации М, а также приведем ряд исходных требований для тестовых примеров ЦФ, используемых при оценке эффективности алгоритмов.

Стратегии минимизации М. Известны две стратегии. В первой из них (поиск от верхней границы) стремятся уменьшить некоторое исходное значение $M = M_{\max}$ [30, 31, 44, 70], так как оно выбрано завышенным, а во второй (поиск от нижней границы) M постепенно увеличивают [3, 5, 38, 62, 75], поскольку исходное значение $M = M_{\min}$ занижено. Оптимальное (минимальное) значение $M = M_o$ будет находиться в интервале $M_{\min} \le M_o \le M_{\max}$.

Пусть при использовании метода верхней границы найдено допустимое решение для $M = M_1 < M_{\max}$, а для M_1-1 такого решения обнаружить не удается. Однако нельзя утверждать, что при M_1-2 или M_1-3 также не будет найдено допустимых решений. Это связано с тем, что существующие базовые алгоритмы являются субоптимальными, т. е. не гарантируют глобального оптимума. Поэтому применение метода верхней границы требует проведения дополнительных проверок с меньшими значениями M (как, например, в алгоритме, описанном в [30, 31]), что не свойственно методу нижней границы. По этой причине последний более предпочтителен.

Если $M_{\min}$ или $M_{\max}$ далеки от M_o, то потребуются большие затраты на вычисления, так как в каждой из рассматриваемых стратегий для текущего M_o выполняется базовый алгоритм. Поэтому очень важно удачно задать исходное значение M (т. е. $M_{\min}$ или $M_{\max}$), чтобы ускорить процесс получения окончательного решения. Часто $M_{\max}$ определяется методом простого округления коэффициентов. В [44] делается “привязка” к статистической длине слова, а в [30]- к ее минимальному значению, как рекомендовано в [11] и упомянуто выше. В [5, 38] $M_{\min}$ выбирается заведомо малой величины, например $M_{\min}$ = 1, 2,… В [62, 75] для определения $M_{\min}$ используется метод [58], описанный выше. Методы из [11, 58] более сложные, но дают лучшие результаты. В [75] для ряда ФНЧ показано, что метод [58] позволяет получить $M_{\min}$, отличающийся от M_o не более чем на 2 бита. Метод [11] приводит к несколько худшим результатам при определении $M_{\max}$. Отличие от M_o составляет 3 бита [31].

Длину слова коэффициентов можно существенно уменьшить, если преднамеренно увеличить порядок передаточной функции N. Это происходит благодаря тому, что увеличивается допуск на отклонение АЧХ [2, 95]. В [12] на примере ФНЧ Золотарева-Кауэра показано, что при N = 8 можно получить M = 15, а при N = 10 значение M = 6. Подобное наблюдается и для других требований к ФНЧ с характеристиками Чебышева [47] и Золотарева-Кауэра [48, 49]. Опытным путем в [12, 47] было установлено, что M не становится меньше некоторой величины, если даже N увеличивается более чем в 2 раза.

Допуск на отклонение АЧХ можно увеличить и путем перераспределения требований между субфильтрами. В частности, все субфильтры могут быть идентичными, что приводит к результирующей передаточной функции с увеличенным N и кратными полюсами и нулями. На примерах ФНЧ Чебышева (при увеличении N от 8 до 10) в [77] показано, что такой подход при двойной кратности полюсов приводит к большим или, в зависимости от требований к АЧХ, меньшим на 1 бит значениям M, чем получаемым при простом увеличении N до 10. Высказано предположение, что результаты могут отличаться и более чем на 1 бит.

Таким образом, если длина слова задана и применение алгоритма минимизации M не приводит к приемлемым характеристикам, то можно попытаться устранить эту проблему, преднамеренно увеличив N одним из вышеописанных способов и вновь применив алгоритм.

Тестовые примеры. Для иллюстрации эффективности алгоритмов широко используется тестирование. При этом, как правило, проводится сравнение результатов, полученных с помощью вновь разработанного и уже существующих алгоритмов. Насчитывается свыше двух десятков примеров ЦФ, для которых представлены конкретные результаты. Однако лишь 10 из них были рассмотрены более чем в одной публикации (т. е. некоторые авторы предпочли использовать свои примеры). Для удобства дальнейшего изложения будем обозначать их ЦФ-1-ЦФ-10.

Это каскадные ФНЧ (ЦФ-1-ЦФ-7), требования и значения N для которых приведены в табл. 1;

Таблица 1

Требования к параметрам АЧХ и значение N для ЦФ-1 - ЦФ-7

ЦФ	$\Delta a_{\max}$, дБ	$a_{0\min}$, дБ	$f_{1\min}$	$f_{2\max}$	N
1	0,174	60,1	0,166667	0,188056	10
2	0,521	60,3	0,2	0,22	8
3	0,2	60,0	0,0625	0,075	8
4	0,104	40,1	0,05	0,065	6
5	0,521	50,7	0,1	0,125	6
6	0,521	40,3	0,027778	0,054872	4
7	0,869	30,9	0,1	0,15	4

каскадный ПФ 8-го порядка (ЦФ-8) с требованиями к АЧХ:

$\Delta a_{\max}$ =0,521 дБ, $a_{0\min}$ = 40,3 дБ,

$f_{1\min}$ = 0,191667, $f_{2\max}$ = 0,205556,

$f_{3\min}$ = 0,233333, $f_{4\max}$ = 0,247222

и два ЦФ (ЦФ-9 и ЦФ-10) прямой формы 2-го порядка. ЦФ-9 представляет собой ФНЧ, реальная АЧХ которого должна аппроксимировать зависимость:

f =0, 0,01, 0,02, . . ., 0,09 - $D(f) = 1$,

f =0,1 - $D(f)$ =0,707,
f =0,12 - $D(f)$ =0,
f =0,15, 0,2, 0,25, . . . , 0,5 - $D(f)$ =0,

а ЦФ-10 - широкополосный дифференциатор, АЧХ которого контролируется на частотах f = 0, 0,025, 0,05,…, 0,5. Все приведенные частоты нормированы относительно частоты дискретизации.

Предполагается, что для ЦФ-9 и ЦФ-10 весовая функция W(·)= 1, а коэффициент A = 1. Для ЦФ-10 оптимальному решению с непрерывными коэффициентами соответствует $e_2^{'\,2}$ =0,27480 $0{,}27480\times 10^{-3}$ [4].

Передаточная функция каскадных ЦФ имеет следующий вид:

$$H(z)=\prod_{i=1}^{K} H_i(z)=\prod_{i=1}^{K}\frac{1+B_{1i}z^{-1}+B_{2i}z^{-2}}{1+A_{1i}z^{-1}+A_{2i}z^{-2}}, \qquad (7)$$

где К=N/2 - для четных N,

Для ЦФ из табл. 1 и ЦФ-8 минимизируют $\tilde{e}_\infty$ или ведут поиск допустимых решений, удовлетворяющих условиям (4) или (5), а для ЦФ-9 и ЦФ-10 минимизируют ошибку $\tilde{e}_2^{'}$.

Модифицированный прямой поиск. Одной из первых публикаций, стимулировавшей исследование проблемы синтеза передаточных функций ЦФ при ограниченной длине слова коэффициентов, была работа Авенхауса и Шусслера [1]. В ней показано, что простое округление коэффициентов, соответствующих минимаксному решению непрерывной задачи, далеко не самый лучший способ квантования коэффициентов и что дополнительная оптимизация этих округленных коэффициентов на дискретном множестве значений может существенно улучшить решение. В частности, для ЦФ-8 длина слова была уменьшена на 3 бита (33%).

В [1] применен модифицированный метод прямого поиска Гаусса-Зейделя, характерный тем, что в нем изменяется только один из искомых коэффициентов с шагом q, а другие временно остаются неизменными. Суть модификации, введенной для преодоления “ловушек” на плохих локальных оптимумах и значительно повышающей эффективность метода, описывается в [6]. Во-первых, кроме исходного округленного решения запоминается еще около 10-20 ближайших наборов коэффициентов для использования их в качестве начальных. Во-вторых, метод объединяется с процедурой полного перебора в четырехмерном подпространстве коэффициентов при изменении их в окрестности 2q. При этом четверки коэффициентов выбираются по мере уменьшения их влияния на $\tilde{e}_\infty$.

Другой метод прямого поиска-метод конфигураций Хука и Дживса - исследован в [3]. При использовании этого метода делается попытка экстраполяции направления успешного перемещения. Установлено, что метод конфигураций критичен к последовательности перечисления коэффициентов и что случайное их упорядочение (рандомизация) улучшает решение. Кроме того, повысить эффективность можно путем изменения сразу двух компонент искомого вектора (диагональный поиск) в окрестности локального оптимума. С учетом этих факторов разработан алгоритм. Из-за его субоптимальности наблюдается аномальность (что также зафиксировано в [1] при простом округлении коэффициентов), заключающаяся в том, что иногда решения с большими q обладают меньшими значениями $\tilde{e}_\infty$), чем решения с меньшими q. Метод позволяет получить такие же результаты, как и предыдущий, но, по мнению автора [3], имеет преимущества, будучи простым для программирования и гибким в смысле обмена времени вычисления на качество результатов. В зависимости от версии алгоритма, опытов с рандомизацией и конкретного ЦФ (ЦФ-1, ЦФ-2 или ЦФ-8) требуется 356-2650 оценок целевой функции для получения приемлемых решений.

Дальнейшее исследование методов прямого поиска проведено в [19, 30, 31, 70]. В [19] рассмотрены оба вышеупомянутых метода и отмечено, что они могут быть применены не только для каскадных, но и для прямых и параллельных структур ЦФ при произвольных требованиях к АЧХ иконтроле p-ошибки. Каждый из методов модифицируется введением диагонального и случайного поиска. Кроме того, случайный поиск используется для генерации начальных решений. Лучшие результаты получаются, когда коэффициенты оптимизируются в порядке понижения коэффициентной чувствительности (т. е. чувствительности АЧХ к изменению коэффициентов). Эффективность алгоритма иллюстрируется для ЦФ-9, ЦФ-10 при M=6. В табл. 2 приведены полученные результаты, в том числе и с помощью других алгоритмов. Здесь V означает количество необходимых оценок целевой функции. Как видно из таблицы, в некоторых алгоритмах требуется дополнительное число

Таблица 2

Ошибки $\tilde{e}_2^{'}$, полученные различными алгоритмами, и необходимое количество оценок V вычислений

Алгоритм	ЦФ-9		ЦФ-10	
	$\tilde{e}_2^{'2}$	V	$\tilde{e}_2^{'2} \times 10^3$	V
[4]	0,31535	139	0,64305	72
[8]	0,29059	2116 + 1006	0,52233	2319 + 1239
[10]	0,29059	1030	-	-
[19]	0,29059	1172 +1309	0,52233	916 +103
[59]	0,29062	77	0,64309	88
[76]	-	-	0,52230	> 1000

(справа от знака +). Для обсуждаемого алгоритма эти вычисления связаны с коррекцией коэффициента передачи на нулевой частоте. В работе получено также решение для ЦФ-3 при M = 7 и V=159+951. По мнению автора [19], модифицированный алгоритм Хука и Дживса более надежен.

Тем не менее в [30, 31] предложен алгоритм, основанный на методе Гаусса-Зейделя, улучшенный новой стратегией изменения коэффициентов и введением процедуры полного перебора их в трехмерном подпространстве в окрестности 2q. В алгоритме, также как в [3], используется рандомизация, но по способу, описанному в [102]. Выявлено, что добавление процедуры минимизации статистической длины слова коэффициентов [11] дополнительно улучшает решение, а именно для трех рассмотренных ЦФ реальная длина слова была уменьшена на 1 бит. Отмечается, что степень успеха применения этой процедуры зависит от различия статистических длин, соответствующих полосе пропускания и задерживания. Для структур ЦФ, в которых степень различия велика, применение процедуры наиболее желательно. Для ЦФ-4 - ЦФ-6 алгоритм позволяет уменьшить M на 27…36% относительно значений, получаемых простым округлением коэффициентов. Время счета на IBM 370/125 составляет 134 . . . 358 с.

В отличие от упомянутых работ, в которых рассмотрены каскадные ЦФ, в [70] модифицированный алгоритм Хука и Дживса применен для трех структур волновых ЦФ. Это структуры на единичных элементах, мостовые и лестничные. Суть модификации заключается в том, что если ошибка $\tilde{e}_\infty$ в процессе поиска решения не уменьшается, то изменяются сразу несколько коэффициентов. Детали в работе не поясняются. В зависимости от конкретного ЦФ 5-го и 7-го порядков требуется от 152 до 1456 оценок целевой функции. Для трех рассмотренных примеров найдены решения при M = 6.

Методы перебора. Если число варьируемых параметров невелико, то для поиска решения можно воспользоваться идеей перебора. При этом не гарантируется нахождение глобального оптимума по той причине, что в этом случае область изменения параметров, выбираемая исходя из приемлемого машинного времени, не охватывает всей области их возможного изменения.

В [5] для каскадных ЦФ проблема поиска допустимого решения сведена к задаче 0-1 программирования с линейной целевой функцией и нелинейными ограничениями. Применяется метод неявного перебора Лавлера и Бэлла. Для L искомых коэффициентов требуется не более 2L вычислений ошибки, т. е. поиск ограничивается изменением только последнего (М-го) бита в коэффициентах. В [6] было отмечено, что оптимум не обязательно лежит в такой малой окрестности. Тем не менее в [5] для ряда различных ЦФ (широкополосный дифференциатор, формантный фильтр гласных фонем, ПФ Золотарева-Кауэра и ФНЧ Чебышева, соответственно 4, 6, 8 и 10-го порядков) удалось на 17 31% уменьшить длины слова коэффициентов по сравнению с полученными простым округлением.

В [15] для каскадных ЦФ низких и средних порядков предложен алгоритм, основанный на переборе четырех дискретных позиций полюсов в окрестности решения, соответствующего непрерывным коэффициентам. Это решение находится применением аппроксимации Баттерворта или Чебышева. Для ускорения процедуры поиска декретные позиции перебираются, начиная от ближайших к непрерывным. АЧХ, соответствующая квантованным коэффициентам, считается допустимой, если на ряде частот удовлетворяет заданным отклонениям от АЧХ, полученной при непрерывных коэффициентах. Для ЦФ низких порядков можно использовать графический метод. В этом случае предполагается построение контура возможных положений полюсов с последующим исследованием ближайших к этому контуру дискретных позиций. Отмечается, что этот подход требует хорошего понимания проблемы синтеза ЦФ. В качестве примеров рассматриваются ФНЧ 3-го порядка и ПФ 4-го порядка с характеристиками Баттерворта, для которых получены решения при М = 1 и М = 4, соответственно.

Подобного типа поиск использован для нахождения передаточных функций ПФ 8-го порядка параллельной структуры [68]. При этом полагается $C_i^* = k_i 2^{-M}$ и осуществляется вариация целых чисел k_i, имеющих знак. Исходные решения с округленными коэффициентами получаются на основе аппроксимации Баттерворта и метода инвариантности импульсной характеристики. Во всех трех предложенных вариантах перебора передаточные функции 2-го порядка (число которых равно четырем) выбираются в порядке близости их полюсов к единичной окружности, а их коэффициенты k_i варьируются в диапазоне 0±1. Каждый из трех вариантов приводит к ряду подходящих ПФ, для которых допускаются некоторые нарушения условий (5). Приводится каталог из восьми найденных передаточных функций, АЧХ которых перекрывают диапазон частот 0,1273…0,3820. Эти ПФ могут найти применение во многих практических приложениях.

Случайный поиск. Методы случайного поиска являются привлекательными по причине простоты программирования, гибкости и нечувствительности к нерегулярностям целевых функций. В [4] предложен двухэтапный алгоритм поиска. Коэффициенты преобразуются к целым числам k_i. На первом этапе приращения Δk_i равновероятно принимают значения h, 0 и -h. В процессе поиска h уменьшается от h_0 до h_1. На втором этапе приращения равновероятно принимают значения 0, ±1, ±2,...,± h_1. Числа h_0 и h_1 выбираются в соответствии с характером целевой функции, максимально допустимым числом ее оценок и размером области поиска. На каждом этапе следующий случайный шаг делается от нового вектора при условии, что этот вектор приводит к улучшению прежнего решения, коэффициенты C_i^* ограничиваются величиной ±2 и в процессе поиска осуществляется контроль условий устойчивости ЦФ. В алгоритме последовательно оптимизируются коэффициенты, влияющие на позиции полюсов, нулей и усиление с целью минимизации $\tilde{e}_2^{'}$. Рассматриваются ЦФ-9 и ЦФ-10 при М = 6 и М = 9. Для ЦФ-10 по сравнению с простым округлением при М = 6 и М = 9 ошибка $\tilde{e}_2^{'2}$

уменьшена в 9,1 и 1,35 раз, соответственно. При М=9 для ЦФ-9 количество оценок V=1229, а для ЦФ-10 - V = 103. Результаты для М = 6 приведены в табл. 2.

В [22] показано, что при вероятности появления глобального решения 0,37 требуемое число испытаний в методе простого случайного поиска даже при шести оптимизируемых коэффициентах очень велико, $\approx 10^6$. Это требует больших затрат машинного времени. В связи с этим исследуются две модификации метода, позволяющие сократить время вычисления ограничением поиска с учетом предыстории на каждом шаге (случайный поиск с линейной тактикой) и ограничением области допустимых значений векторов, потенциально приводящими к уменьшению целевой функции.

Применяется минимаксный критерий в частотной области. Получены соотношения для оптимального масштабирования величины случайного приращения и для приближенной оценки области допустимых значений. На примере ФНЧ 6-го порядка Чебышева прямой формы показано преимущество алгоритмов с введенными модификациями, значительно сокращающими время вычисления. Выявлена максимальная скорость сходимости с использованием поиска в ограниченной области. При этом высокая скорость наблюдается для значений целевой функции, существенно отличающихся от глобально оптимального (соответствующего неквантованным коэффициентам). В окрестности оптимального непрерывного решения в "ближней" зоне область допустимых решений иногда оказывается пустой.

Отмечается, что использование случайного поиска в большинстве случаев эффективнее детерминированных методов [6, 7]. Однако сравнительных оценок не приводится. В качестве примеров расчета представлены графики полученных АЧХ каскадных ПФ Чебышева 10-го порядка для полувокодера.

В работе [22] также рассматривается задача оптимизации импульсной характеристики. Исследуются алгоритм случайного поиска с линейной тактикой, упомянутый выше, и алгоритм наилучшей пробы, основанный на многократной случайной выборке из текущей исходной точки. При достаточно большом числе проб алгоритм позволяет двигаться в направлении, аппроксимирующем направление антиградиента. На примере ФНЧ Баттерворта 7-го порядка показано, что второй алгоритм дает уменьшение максимальной ошибки, соответствующей простому округлению, в 6 раз, а первый - лишь в 2,6 раза.

В [26] обращено внимание на проблему ограничения области поиска решения. Используется критерий минимизации p-ошибки, причем $p \neq \infty$. В приведенных примерах p = 2. Предлагаемый метод основывается на рассмотрении геометрического контура целевой функции в малой области непрерывного пространства, окружающего точку глобального непрерывного оптимума. Предполагается, что в указанной области целевая функция унимодальна и для нее справедлива квадратичная аппроксимация, которая используется для управления процессом случайного поиска. Граничный контур, внутри которого ищется решение с квантованными коэффициентами, выбирается проходящим через точку, полученную округлением коэффициентов. Методом случайного поиска определяется благоприятное направление (приводящее к наилучшему решению с квантованными коэффициентами), проходящее через точку непрерывного глобального оптимума. Граничный контур корректируется путем сужения по мере нахождения решений с квантованными коэффициентами.

Отмечается, что предлагаемый метод дает лучшие результаты по сравнению с эвристическими процедурами [4, 6, 15] и более экономичен по времени вычисления, чем процедуры [8, 10], использующие метод ветвей и границ. Этот вывод сделан по результатам исследования алгоритма для ЦФ-10 при М = 6 и М = 9, а также для каскадного фильтра гласных фонем 8-го порядка при М = 6. По мнению автора [26], метод пригоден для ЦФ с 18 коэффициентами и, вероятно, с много большим числом, для которых методы ветвей и границ вряд ли пригодны.

Развитие идей работ [6, 11] нашло отражение в [44], где предложен алгоритм случайного поиска, направленный на минимизацию длины слова коэффициентов М. Получены соотношения для определения начального значения М на основе статистического подхода, подобного описанному в [6]. Для текущего М в процессе поиска осуществляется контроль среднеквадратической ошибки. В качестве примера рассматривается ЦФ-7, для которого статистические длины слов коэффициентов передаточной функции равняются 3 . . . 7 и 11 . . . 14 бит соответственно для полосы задерживания и пропускания. Применение алгоритма приводит к значению М = 6.

В [46, 50, 68] методом случайного поиска получен каталог передаточных функций ФНЧ и ФВЧ 4-го и 6-го порядков, предназначенных для параллельной реализации. Коэффициенты имеют длину слова М = 4. АЧХ девяти ФНЧ [46], пяти ФНЧ [50] и четырех ФВЧ [68] перекрывают диапазоны граничных частот 0,039 ... 0,129, 0,119 ... 0,247 и 0,2149 0,4576, соответственно.

Методы ветвей и границ. Описываемые в [8-10, 63, 76] методы нелинейной дискретной оптимизации основываются на алгоритме ветвей и границ Дакина, в котором многократно решается задача на непрерывном множестве значений переменных с увеличивающимся числом ограничений.

В [8-10] минимизируется р-ошибка при $p \neq \infty$. В [8] для решения задачи на непрерывном множестве значений коэффициентов применяется градиентный алгоритм Бэста и Риттера. Основанием для этого послужило задание только линейных ограничений (условия устойчивости каскадных ЦФ и ограничения, характерные для метода ветвей и границ) и предположение, что при малых q, порядка. 2-6, целевая функция приближается к квадратичной. В качестве примеров рассматриваются ЦФ-9 и ЦФ-10 при М = 6 и М = 9. Значения среднеквадратической ошибки для ЦФ-9, полученные при М = 6, оказались лучше, чем приведенные в [4] при М = 9. Некоторые результаты представлены в табл. 2. Вспомогательные вычисления связаны с оценками градиента, их количество указано в табл. 2 (справа от знака +). В табл. 2 значения V соответствуют всему “дереву” поиска, т.е. полному завершению алгоритма. Отмечается, что для ЦФ-9 аналогичное, а для ЦФ-10 несколько худшее значение ошибки, но лучшее, чем в [4], получается на ранних стадиях “ветвления”: в первом случае V = 189 + 85, а во втором V = 96 + 49. Для рассмотренных ЦФ время счета на IBM 360/75 составляет 31...43 с для полного завершения работы алгоритма. Отмечается, что при р > 2 требуется много больше времени.

В [9, 10] для решения непрерывной задачи применяется метод Флетчера без контроля ограничений. Как следует из табл. 2, результаты для ЦФ-9 совпадают с представленными в [8], но предложенный алгоритм является более быстрым. Близкое к оптимальному решение, но лучшее, чем из [8], достигается после 306 оценок. Описана интересная версия алгоритма, в которой длины слова коэффициентов рассматриваются как переменные. При этом коэффициенты представляются в виде $C_i^* = k_i \times 2^{m_i}$ и наряду с поиском k_i ведется поиск длин слов m_i. Все m_i, в частности, могут быть идентичными.

В [63, 76] описана другая стратегия оптимизации, суть которой заключается в следующем. Сначала область пространства коэффициентов локализуется и характеризуется путем гауссова процесса поиска, называемого адаптацией Гаусса [103]. Это позволяет аппроксимировать целевую функцию квадратичной, выраженной через характеристики гауссова процесса. Затем эта функция минимизируется с помощью техники ветвей и границ, для получения ряда хороших (в частности, 100) дискретных решений, включая глобальное. Наконец из этих решений выбирается то, для которого сама целевая функция имеет наилучшее значение. В зависимости от рассматриваемого примера ЦФ в процессе адаптации используется 1000 или 4000 оценок (2) или (3). Случай $p=\infty$ не исключается. Для ЦФ-2 получен ряд допустимых решений при М= 7, тогда как в [3] решения найдены только при М = 9. Для ЦФ-10 результаты представлены в табл. 2.

Дискретно-непрерывная оптимизация. Суть методов, сочетающих оптимизацию характеристик ЦФ на дискретном и непрерывном множестве переменных, заключается в следующем. Сначала решается задача на непрерывном множестве значений коэффициентов. Затем следуют этапы поочередного квантования полученных коэффициентов (по одному или парами). При этом после каждого квантования осуществляется реоптимизация коэффициентов, оставшихся непрерывными. Процесс продолжается до тех пор, пока все коэффициенты не станут дискретными.

Предложены различные варианты алгоритмов, реализующие этот подход для каскадных ЦФ.В [7, 20, 23, 56, 69] используется минимаксный критерий, а в [59, 80] минимизируется среднеквадратическая ошибка. Для решения задачи реоптимизации в [7, 20, 23] применяются алгоритмы линейного, а в [59] нелинейного программирования.

Важным моментом является выбор стратегии и очередности квантования коэффициентов. В [7] предлагается округлять сразу все коэффициенты числителя передаточной функции и в процессе оптимизации сохранять их, а коэффициенты знаменателя округлять в порядке уменьшения чувствительностей АЧХ к их изменению. Такая же очередность используется в [56, 59, 69], но коэффициенты не сортируются по принадлежности к числителю или знаменателю. Кроме того, в зависимости от величины ошибки коэффициенты округляются или усекаются [56, 80], или могут принимать значения в диапазоне ±4q [59].

В работе [59] исследуются и другие варианты очередности квантования. На конкретных примерах (ЦФ-9, ЦФ-10) и ФНЧ 4-го порядка) показано, что квантование в порядке увеличения, а не уменьшения чувствительностей приводит к худшим результатам по величине и требуемому количеству оценок целевой функции. Кроме того, очередность квантования коэффициентов $A_{2,k}, A_{1k}, B_{2k}, B_{1k},..., A_{2,1}, A_{11}, B_{21}, B_{11}$ в (7) предпочтительнее, чем обратная, и эквивалентна по достижимым результатам очередности в порядке уменьшения чувствительностей. В этом случае важно, как упорядочены $H_i(z)$ в выражении (7). Однако в работе этот вопрос не затрагивается.

В [20, 23] коэффициенты подвергаются квантованию парами. Каждая пара соответствует позиции нуля или полюса передаточной функции в комплексной z-плоскости. В окрестности исходного непрерывного решения допускается перебирать вплоть до 16 ближайших дискретных позиций, соответствующих квантованным коэффициентам. Исследуются три правила выявления приоритетности в перечислении дискретных позиций и два критерия определения очередности квантования.

Выбор следующей дискретной позиции осуществляется в порядке увеличения функции ошибки (правило 1) или модуля разности расстояний от непрерывной и дискретной позиции полюса (нуля) до характерной точки (соответствующей граничной или центральной частоте) на единичной окружности (правило 2) или выбирается только одна дискретная позиция, соответствующая округленной паре коэффициентов (правило 3).

Согласно первому критерию квантование осуществляется в порядке увеличения функции ошибки, усредненной для четырех ближайших дискретных позиций, упорядоченных по правилу 1. Второй критерий предполагает сначала выполнять квантование коэффициентов, соответствующих нулям, а затем полюсам. При этом нули перечисляются в порядке увеличения расстояний до характерной точки на единичной окружности, а полюсы – по мере удаления от единичной окружности.

Исследования показывают, что лучшие результаты получаются при использовании правила 1. Однако для коэффициентов, соответствующих нулям, достаточно использовать простое правило 3, что согласуется с идеей простого округления коэффициентов числителя передаточной функции [7]. По мнению автора [20, 23], второй критерий пригоден для ЦФ со стандартными требованиями, а первый более сложный критерий необходим, когда характер расположения нулей и полюсов в z-плоскости является нерегулярным.

Отмечается, что предлагаемый алгоритм потенциально допускает большие сдвиги в дискретных значениях коэффициентов (в частном примере 7, 2q) по сравнению с исходными значениями непрерывных коэффициентов и для реализации таких сдвигов в алгоритмах “чисто” дискретной оптимизации [3, 6] может потребоваться недопустимо большое время вычисления.

Вместо процедуры реоптимизации целевой функции, выполняемой численными методами, в [80]предлагается осуществлять переоценку непрерывных коэффициентов, пользуясь аналитическими соотношениями. Для этой цели каждая передаточная функция звена каскадного ЦФ аппроксимируется усеченным рядом Падэ:

$$H_i(z) = 1 + \sum_{l=1}^{4} g_{l,i} z^{-l},$$

где

$$g_{l,i} = B_{l,i} - \sum_{j=1}^{l} A_{j,i} g_{(l-j),i}.$$

Проводится расчет $g_{l,i}$. Далее выполняется квантование $A_{j,i}$ исходя из получения минимального смещения полюсов $H_i(z)$ в z-плоскости, квантованные коэффициенты вместе с $g_{l,i}$ используются для переоценки $B_{j,i}$. Затем квантуются $B_{j,i}$ исходя из получения допустимых ошибок в коэффициентах $g_{l,i}$. При этом приоритет отдается дискретным значениям $B^*_{j,i}$, соответствующим минимальному смещению нулей $H_i(z)$. Вся эта процедура выполняется отдельно для каждой $H_i(z)$. После этого делается лишь одна оценка среднеквадратической ошибки для АЧХ всего ЦФ.

Эффективность описанных алгоритмов дискретно-непрерывной оптимизации демонстрируется на примерах ЦФ различной сложности. Одни авторы сосредоточили внимание на получении допустимых решений при минимальной длине слова коэффициентов М [7, 20, 23], другие - на поиске решений, соответствующих минимуму $\widetilde{e}_\infty$ [56, 69] или $\widetilde{e}_2^{'}$ [59, 80] при заданной длине слова.

В [7] для ЦФ-3 значение М уменьшено на 27% по сравнению с полученным простым округлением. В [23] для ЦФ-1, ЦФ-2, ЦФ-8 значение М уменьшено на 1,2 и 0 бита, соответственно, по отношению к приведенным в [3]. Для ЦФ-1, ЦФ-2, ЦФ-8 в [69] найдены минимаксные ошибки, не достигнутые применением алгоритмов (1, 3]. Для ЦФ-8 в [23] потребовалось 81, а в [69] 150 оценок целевой функции. В то же время при использовании алгоритма [3] требуется 1788...2650 оценок. Некоторые из полученных результатов в [59] представлены в табл. 2. В [80] рассматриваются те же ЦФ, что и в [59], но значения среднеквадратической ошибки оцениваются по 100 точкам. Отмечается, что алгоритм дает лучшие или эквивалентные результаты по сравнению с полученными алгоритмами [4, 8]. При этом требуются существенно меньшие вычислительные затраты.

Возможность применения ЦЛП. Все описываемые в данном разделе обзора алгоритмы предполагают, что проблема поиска приемлемых характеристик ЦФ решается как задача дискретного (или целочисленного) нелинейного программирования. Для ЦФ прямой формы в [38] получены уравнения-ограничения и целевая функция, которые приводят к задаче сепарабельного типа, решаемой методами ЦЛП. Подобное формулирование проблемы для других структур ЦФ, например каскадных, приводит к нелинейной задаче [64]. В качестве примера в [38] рассматривается ЦФ-9. Найденные коэффициенты передаточной функции для М = 6 и М = 9 совпадают с приведенными в [8].

Вариация исходных параметров. Суть обсуждаемого здесь подхода заключается в том, что с целью получения приемлемого решения вместо вариации искомых коэффициентов на дискретном или дискретно-непрерывном множестве значений варьируются исходные параметры АЧХ ($\Delta a, a_0$ и граничные частоты f_i). Первыми публикациями, в которых демонстрируются хорошие потенциальные возможности такого подхода, были статьи [11, 12]. О целесообразности подбора исходных параметров говорится и в монографии [41], а более детальному исследованию проблемы посвящена серия статей [57, 58, 62, 72, 75, 87].

Автор [11] счел затруднительным применение вариации исходных параметров с целью минимизации длины слова коэффициентов и вместо этого предложил минимизировать статистическую длину слова. Работа [11] уже упоминалась в данном обзоре в связи с определением начальных приближений.

В итеративной процедуре перераспределения допусков [12] выбор некоторого вспомогательного параметра (а фактически параметра Δa) осуществляется так, чтобы для определенной структуры ЦФ длина слова рассчитанных коэффициентов после их округления была минимальной. При этом предполагается контроль (5). Нижнему пределу этого параметра соответствует $\Delta a = \Delta a_{\min}$ и максимальный допуск на отклонение АЧХ в полосе пропускания, но $a_0 = a_{0\min}$ и допуск в полосе задерживания равен нулю. Для верхнего предела наблюдается обратное, т. е. $\Delta a = \Delta a_{\max}$ и $a_0 = a_{0\max}$. При текущем значении длины слова коэффициентов М направление изменения параметра в этой процедуре зависит от того, где, в полосе пропускания или в полосе задерживания, нарушены требования. Если требования нарушены в каждой из полос, то М увеличивается на единицу. Обнаружена очень сильная нерегулярность зависимости величины $\widetilde{e}_\infty$ в полосе пропускания от значений вспомогательного параметра. Тем не менее автором [12] отмечается, что за 5…10 шагов изменения этого параметра можно получить допустимое решение.

В [41] для простоты предлагается сначала найти ряд приемлемых решений по данным из справочника при различных Δa, а затем, после округления коэффициентов, выбрать наилучшее решение.

Работа [57] посвящена задаче минимизации М. Установлено, что искомые коэффициенты являются функциями одного, двух или трех исходных параметров АЧХ соответственно для ФНЧ (или ФВЧ) Баттерворта, Чебышева и Золотарева-Кауэра. Введение операции округления делает эти функциональные зависимости дискретными. В результате одному и тому же набору квантованных коэффициентов отвечает множество исходных параметров. Поэтому процедура [12], в которой не учитывается эта особенность, может приводить к пропускам и/или повторам оценок целевой функции. Первая ситуация ведет к неоптимальности решения, а вторая - к излишней трате времени вычисления.

Рассматривается вариация Да. В этом случае, из-за дискретности упомянутых зависимостей, в диапазоне $\Delta a_{\min} \le \Delta a \le \Delta a_{\max}$ будет иметь место конечное число интервалов, для которых можно получить различные решения, отличающиеся хотя бы одним квантованным коэффициентом. Определение оптимального интервала, соответствующего наилучшему или, по крайней мере, допустимому решению, выполняется простым их перечислением. При этом М увеличивается на единицу лишь в том случае, когда допустимое решение не обнаружено ни для одного из существующих интервалов. Иллюстрируется, что стратегия смены М, предложенная в [12], может приводить к завышенным значениям М.

На конкретных примерах ЦФ показано, что введение вариации граничной частоты полосы задерживания позволяет дополнительно уменьшить М. В [72] для шести ФНЧ 4-го порядка Золотарева-Кауэра демонстрируется, что упрощенный подход [41] по сравнению с алгоритмом [57] может приводить как к аналогичным, так и к сильно завышенным М (в 2 раза для одного из примеров).

В [62, 75] предложены более эффективные алгоритмы, чем в [57]. Суть их заключается в локальном поиске допустимого решения в окрестностях начальных точек, определенных согласно [58]. Алгоритм [62], позволяющий одновременно минимизировать длину слова коэффициентов и отношение шум округления/сигнал, будет пояснен ниже. Здесь рассмотрим алгоритм из [75].

Ранее было отмечено, что может быть несколько начальных точек, соответствующих доминирующей особенности. Для ускорения получения решения первой выбирается точка, соответствующая полюсу, наиболее удаленному от единичной окружности в z-плоскости, ближайшему к мнимой оси, и нулю, ближайшему к этому полюсу. Остальные точки выбираются аналогично. В обоих направлениях, в сторону уменьшения и увеличения, осуществляется изменение одного из исходных параметров АЧХ, соответствующего текущей начальной точке. При этом поиск ведется на отрезке, ограниченном окрестностью постоянства коэффициентов доминирующей особенности и областью S'. Если все возможные решения на данном отрезке исчерпаны, то значение параметра, приводящего к минимуму неравномерности АЧХ в полосе пропускания, используется в качестве исходного для дальнейшего исследования. Изменяется другой параметр и т. д., пока не будет найдено допустимое решение или исчерпаны все параметры. Шаг изменения параметров выбирается путем проб так, чтобы в искомом векторе C^* происходило изменение на q лишь одного из коэффициентов. Только в этом случае оценивается неравномерность. Рекомендуется перечислять параметры в порядке $\Delta a, f_1, f_2$.

В табл. 3 приведены значения M_o, полученные с помощью различных алгоритмов. Сокращение ПО означает простое округление коэффициентов минимаксного решения. Значение M_o для ЦФ-8, соответствующее алгоритму [1], взято из [3], а алгоритму [57] добавлено автором данного обзора. В последнем случае воспроизвести решение, для получения которого потребовалось всего 4 оценки целевой функции, можно путем расчета ПФ Золотарева-Кауэра по требованиям для ЦФ-8, но при $\Delta a = 0{,}16$ дБ, и последующего округления полученных коэффициентов до М = 6.

Таблица 3

Значения длины слова M_o, полученные различными алгоритмами

Алгоритм	M_o							
	ЦФ-1	ЦФ-2	ЦФ-3	ЦФ-4	ЦФ-5	ЦФ-6	ЦФ-7	ЦФ-8
ПО	9	10	12	11	9	10	5	9
[1]	7	-	-	-	-	-	-	6
[3]	7	9	-	-	-	-	-	6
[7,13,19]	-	-	8	-	-	-	-	-
[12]	6	-	-	-	-	-	-	-
[23]	6	-	-	-	-	-	-	6
[30]	-	-	-	8	8	8	-	-
[31]	-	-	-	7	7	-	-	-
[44]	-	-	-	-	-	-	6	-
[57]	-	-	-	7	8	7	-	6
[69]	-	7	-	-	-	-	-	6
[75]	6	8	8	7	8	7	5	-
[76,87]	-	7	-	-	-	-	-	-

Как следует из табл.3, алгоритмы на основе вариации исходных параметров [12,57,75,87] позволяют получить аналогичные или улучшенные результаты. Исключением является ЦФ-5, но в [57] при М = 7 (как и в [31]) найдено решение, очень близкое к допустимому ($\widetilde{e}_\infty = 1{,}088$). Оценка параметров АЧХ в [31] и [57] осуществлялась разными способами, причем в [57] для этого использовалось очень большое число частотных точек (по 500 в каждой из полос). В [31] не представлены найденные коэффициенты, что не дает возможности проверить истинность полученного результата.

В [75] приводятся найденные координаты решений в области S', а также указывается число оценок целевой функции, необходимое для получения решений с минимальным М. Для ЦФ-1 это число равно 576, причем при М = M_o требуется всего 49 оценок. Для других ЦФ (см. табл. 2) число оценок не превышает 71.

Интересно отметить, что в [69, §7] для ЦФ-2 получено $\widetilde{e}_\infty = 0{,}952$, а в [76] $\widetilde{e}_\infty = 0{,}9616$. При этом в [87] потребовалось лишь 12 оценок, в [69] их число не указано, а в [76] только предварительно было выполнено 4000 оценок перед последующей оптимизацией методом ветвей и границ. В [69, 76] осуществлялся поиск решения с минимальным значением $\widetilde{e}_\infty$, а в [87] лишь допустимого решения.

Сочетание вариации параметров и коэффициентов. Алгоритмы на основе вариации исходных параметров АЧХ приводят к очень хорошим результатам. Несмотря на это можно попытаться дополнительно улучшить полученные таким способом решения за счет вариации коэффициентов на дискретном множестве значений. В существующих публикациях такой подход не рассматривается. Ниже приводятся результаты, которые подтверждают целесообразность сочетания вариации параметров и коэффициентов.

В [75] для ЦФ-1 установлено, что начальное значение $M = M_{\min} = 5$ и существует 11 начальных точек в области S'. Однако применение алгоритма из [75] и его более сложных модификаций не приводит к допустимым решениям при $M = 5$ Покажем, что сочетание вариации параметров и коэффициентов позволяет найти такие решения.

Первой начальной точке в S' с координатами Δa=0,020944 дБ, f_1=0,174288, f_2=0,188119 соответствует набор квантованных коэффициентов $H(z)$ в (7):

$$\begin{array}{lll}
A^*_{11} = -1{,}00000 & A^*_{21} = 0{,}28125 & B^*_{11} = 1{,}59375 \\
A^*_{12} = -0{,}96875 & A^*_{22} = 0{,}50000 & B^*_{12} = 0{,}18750 \\
A^*_{13} = -0{,}90625 & A^*_{23} = 0{,}75000 & B^*_{13} = -0{,}43750 \\
A^*_{14} = -0{,}87500 & A^*_{24} = 0{,}87500 & B^*_{14} = -0{,}68750 \\
A^*_{15} = -0{,}87500 & A^*_{25} = 0{,}96875 & B^*_{15} = -0{,}75000,
\end{array}$$

причем $B_{2i} = B^*_{2i}$=1, i= 1...5. Полученные параметры АЧХ: $\Delta\tilde{a}$=1,289 дБ, $\tilde{a}_0$=60,87 дБ и ошибка $\tilde{e}_\infty$= 7,394.

Применение алгоритма из [75] приводит к точке в S' с координатой Δa= 0,041021 дБ при тех же самых f_1, f_2, как и для начальной точки. Соответствующие коэффициенты:

$$\begin{array}{ll}
A^*_{11} = -1{,}09375 & A^*_{21} = 0{,}34375 \\
A^*_{12} = -1{,}00000 & A^*_{22} = 0{,}53125 \\
A^*_{13} = -0{,}93750 & A^*_{23} = 0{,}75000 \\
A^*_{14} = -0{,}90625 & A^*_{24} = 0{,}90625 \\
A^*_{15} = -0{,}87500 & A^*_{25} = 0{,}96875,
\end{array}$$

а $B^*_{v,i}$, (ν = 1, 2 и i = 1, , 5) совпадают с вышеприведенными. Параметры АЧХ: $\Delta\tilde{a}$=0,215 дБ > 0.174 дБ, $\tilde{a}_0$= 63,18 дБ, а ошибка $\tilde{e}_\infty$= 1,236 > 1. Таким образом, решение хотя и сильно улучшено по сравнению с исходным, но не является допустимым.

Вариация коэффициента B^*_{11} приводит к трем допустимым решениям:

для B^*_{11} = 1,65625 - $\Delta\tilde{a}$=0,171 дБ, $\tilde{a}_0$ = 63,09 дБ, $\tilde{e}_\infty$= 0,983;

для B^*_{11} = 1,68750 - $\Delta\tilde{a}$= 0,168 дБ, $\tilde{a}_0$ = 63,06 дБ, $\tilde{e}_\infty$ = 0,967,

для B^*_{11} = 1,71875 - $\Delta\tilde{a}$= 0,172 дБ, $\tilde{a}_0$ = 63,04 дБ, $\tilde{e}_\infty$ = 0,989.

Интересно также отметить, что если наряду с B_{11}^* изменять и коэффициент B_{21}^*, то можно получить еще целый ряд решений. Лучшему из них, в минимаксном смысле, соответствует B_{11}^* = 1,71875 и B_{21}^* =l,0625 при - $\Delta\widetilde{a}$ = 0,166 дБ, $\widetilde{a}_0$ =63,07 дБ, $\widetilde{e}_\infty$ = 0,954. Заметим, что при М = 5 метод простого округления минимаксного решения приводит к $\widetilde{e}_\infty$ = 15,3.

Данный пример наглядно иллюстрирует, как “хорошо могут быть спрятаны” приемлемые решения и что дополнительная вариация коэффициентов оказывается в таком случае весьма полезной.

Одновременная минимизация длины слова коэффициентов и уровня шума округления

Округление результатов арифметических действий в ЦФ вызывает шум на его выходе, затрудняющий выделение слабых полезных сигналов. Этот шум округления можно сколь угодно уменьшать ценой наращивания разрядности регистров для хранения данных. Однако прежде чем поступать таким образом, можно попытаться подобрать другую структуру ЦФ из числа известных или синтезировать собственную с улучшенными шумовыми свойствами. Для каскадных ЦФ имеется также возможность уменьшить шум посредством оптимального упорядочения звеньев и подбора полюсно-нулевых пар этих звеньев [102].

Наконец, если структура выбрана, то можно дополнительно уменьшить уровень шума округления путем надлежащего синтеза передаточной функции ЦФ. В этом случае необходимо обеспечить заданные требования к частотным или временным характеристикам ЦФ, желательно при минимальной разрядности коэффициентов. Очевидным подходом для достижения этой цели является поиск ряда допустимых решений, удовлетворяющих, например, условиям (5), и выбор из этого ряда варианта, соответствующего минимальному уровню шума округления. Для получения приемлемых решений могут быть использованы ранее описанные алгоритмы.

Исследованию возможности одновременной минимизации длины слова коэффициентов и уровня шума округления посвящены работы [47-49, 62], в которых рассматриваются каскадные структуры ЦФ с применением L_∞-нормы для масштабирования. Предполагается, что ЦФ оперируют с числами, представленными в форме с фиксированной запятой, и справедлива широко известная вероятностная модель их округления. Все предложенные процедуры синтеза построены таким образом, что не требуют нахождения многих допустимых решений. Это позволяет существенно экономить время расчетов.

В [47-49] порядок N передаточной функции предварительно увеличивается и далее применяются алгоритмы решения обсуждаемой задачи.

В [47] применительно к ФНЧ Чебышева с $N \geq N_{\min}$ используется алгоритм минимизации М, основанный на вариации исходного параметра Δa в диапазоне от $\Delta a_{\min}$ до $\Delta a_{\max}$ [58]. С увеличением N значение $\Delta a_{\min}$ уменьшается. Для полученного набора коэффициентов определяется оптимальное упорядочение звеньев по критерию минимума (шум округлениям)/сигнал. Поиск этого упорядочения выполняется с помощью алгоритма из [02]. На конкретном примере показано, что при $N >$ $N_{\min}$ = 8 наряду со снижением разрядности уменьшается и отношение шум/сигнал по сравнению со случаем $N = N_{\min}$. При N =8 значение М=13, а при N =9 и N =10 получено М=8 и М=7, соответственно. Отношение шум/сигнал для N = 9 и N = 10 снижено на 7дБ и 3 дБ, соответственно.

Применительно к ФНЧ с характеристиками Золотарева-Кауэра в [48, 49] предлагаются две процедуры. Первая из них заключается в минимизации неравномерности АЧХ в полосе пропускания Δa для увеличения допуска на отклонение АЧХ в данной полосе. Это выполняется аналитически. Вторая численная процедура направлена на максимизацию полюсного радиуса с целью уменьшения чувствительности АЧХ к квантованию коэффициентов. После применения каждой из этих процедур осуществляется выбор наилучшего упорядочения звеньев, путем полного их перебора, по критерию минимума мощности шума округления на выходе ЦФ, а затем проводится квантование коэффициентов (включая масштабные множители) методом простого округления.

Для девяти ЦФ при $N = 6$ обе процедуры дают примерно одинаковые результаты и позволяют существенно снизить разрядность коэффициентов М (на 1 8 бит) и уровень мощности шума (на 2…12 дБ) по сравнению с результатами для ЦФ с $N = N_{\min} = 4$. Однако предпочтение следует отдать первой из них из-за ее простоты.

Заметим, что для ЦФ с $N = N_{\min}$ также возможно применение предложенных процедур, так как из-за целочисленности N требования к АЧХ обычно удовлетворяются с запасом. Это имеет место и для рассматриваемых девяти ЦФ. Поэтому приведенные результаты сравнения являются несколько завышенными.

Понижение шума после увеличения N и применения процедур из [47-49] объясняется перемещением полюсов рассматриваемых ЦФ от окружности единичного радиуса в комплексной z-плоскости относительно позиций полюсов при $N = N_{\min}$. Как отмечено в [49], этот факт является благоприятным с точки зрения уменьшения амплитуды предельных циклов.

Процедуры [47-49] иллюстрируют возможности уменьшения М и уровня шума округления при $N > N_{\min}$ относительно $N = N_{\min}$. Однако для фиксированного N они не являются наилучшими. В частности, для ряда ФНЧ в [72] показано, что алгоритм, основанный на вариации Δa, приводит к значениям М, на 2 … 4 бита меньшим, чем алгоритм простого округления коэффициентов, рассчитанных для исходного $\Delta a = \Delta a_{\min}$ в [48, 49].

Работа [62] посвящена задаче одновременной минимизации М и уровня шума округления. По существу предлагаемый алгоритм идентичен вышеупомянутому алгоритму [75] и отличается наличием процедуры масштабирования. Как показывают проведенные расчеты для ряда ЦФ, предложенная очередность перечисления начальных точек в S' позволяет в случае обнаружения допустимого решения не проводить исследований для оставшихся точек, так как им соответствуют решения с большим или незначительно меньшим уровнем шума. В качестве примера рассматривается ЦФ-1 (см. табл. 1). Найдено 18 допустимых решений при М = 6. Разброс в отношении шум/сигнал составляет 1,89 раз или 2,76 дБ. Первому допустимому решению соответствует наименьшее отношение, которое на 0,4 дБ больше, чем полученное для $\Delta a_{\min}$ при М = 8 согласно первой процедуре из [49].

Отмечается, что необязательно всегда минимуму Δa будет соответствовать минимум отношения шум/сигнал. Для широкополосных ФНЧ наблюдается обратная картина: с уменьшением Δa это отношение возрастает, что объясняется нелинейной зависимостью от параметров Δa, f_1 и f_2.

В работе обсуждается проблема учета процедуры упорядочения звеньев и группировки полюсно-нулевых пар. Место включения этой процедуры в алгоритм зависит от способа введения в структуру ЦФ масштабных множителей и от характера коэффициентов числителей передаточных функций звеньев.

Если все коэффициенты числителей являются целыми, не зависимыми от исходных параметров АЧХ (например, как при чебышевской аппроксимации), и масштабные множители вводятся путем изменения этих коэффициентов, либо если коэффициенты числителей произвольны и масштабные множители вводятся между звеньями ЦФ, то процедуру “группировки и упорядочения” следует включить после алгоритма. Очевидно, что в данном случае квантование масштабных множителей не будет сказываться на изменении формы АЧХ, а будет влиять на уровень коэффициента передачи.

Если хотя бы один коэффициент каждого числителя не является целым и зависит от параметров АЧХ (например, для аппроксимации Золотарева-Кауэра), а масштабные множители вводятся путем изменения коэффициентов числителей, то проблемы квантования масштабных множителей и коэффициентов числителей становятся неразделимыми. В этом случае квантование измененных коэффициентов числителей будет сказываться на форме АЧХ и на уровне коэффициента передачи. При этом предлагаемый алгоритм необходимо выполнить с учетом масштабирования, причем для многих вариантов “упорядочения и группировки”. Это потребует значительных временных затрат и поэтому вряд ли оправдано. Рекомендуются два других упрощенных подхода, соответствующих разным включениям в алгоритм упомянутой процедуры, но их сопоставление и детализация в работе не рассматриваются.

Уменьшение числа ненулевых бит

Два возможных подхода к решению проблемы уменьшения числа ненулевых бит в КЗРК коэффициентов описаны в начале настоящего обзора. В первом случае ведется поиск приемлемого решения при ограниченном числе ненулевых бит, а во втором минимизируется суммарное число таких бит во всех коэффициентах. Все публикации, в которых рассматриваются эти задачи, связаны с получением оптимальных АЧХ. Контролю подлежат ошибки $\tilde{e}_\infty$ или $\tilde{e}_2'$ (при A=1). Для решения предлагается ряд алгоритмов дискретного (целочисленного) нелинейного программирования.

Случайный поиск. В [17] рассматриваются лестничные волновые ЦФ с произвольными требованиями к АЧХ. Используются коэффициенты двух типов, а именно: содержащие не более одного или только два ненулевых бита. По мнению автора [17], это оказывается достаточным во многих практических применениях таких ЦФ. В алгоритме на первом этапе фиксируются коэффициенты, относящиеся к нулям передачи и слабо влияющие на АЧХ в полосе пропускания. Под фиксацией понимается округление коэффициентов и представление их в одной из двух вышеупомянутых форм. Оставшиеся коэффициенты, слабо влияющие на АЧХ в полосе задерживания, оптимизируются на непрерывном множестве значений для получения приемлемой АЧХ. Полученные коэффициенты округляются, представляются в виде степени два и используются в качестве начальных для последующей оптимизации методом случайного поиска на, дискретном множестве значений. Применяется биномиальное распределение случайных чисел. По мере выполнения алгоритма все большее число коэффициентов переходит от первого ко второму типу представления. Минимизации подлежит $\tilde{e}_\infty$ в полосе задерживания. Поиск заканчивается, как только находится приемлемое решение, удовлетворяющее заданному плану допусков. Отмечается, что алгоритм становится более эффективным при объединении его с процедурой локального поиска.

В качестве примера приведены результаты синтеза ПФ 14-го порядка, используемого в телефонии. Рассматриваются три варианта требований к ослаблению АЧХ в полосе задерживания. Для первого из них найдено допустимое решение при всех коэффициентах, равных степени два (2 из 11 коэффициентов равны нулю) и длине слова М = 3. Для двух других вариантов с более жесткими требованиями найденные коэффициенты соответствуют двум вышеупомянутым типам их представления при М = 4. Приводятся графики полученных АЧХ.

Применительно к каскадным ЦФ в [40] минимизируется $\tilde{e}_2'$, а в [66] $\tilde{e}_\infty$ при ограничении в обоих случаях - на максимальное число ненулевых бит в коэффициентах.

В [40] применяется несколько модифицированный алгоритм из [26] и уже поясненный в данном обзоре. В качестве примеров рассматриваются ФНЧ и широкополосный дифференциатор, оба второго порядка, обозначенные ранее как ЦФ-9 и ЦФ-10. Исследования проводятся при М=6 и М = 9 и максимальном числе ненулевых бит в каждом коэффициенте, равном 2-6. Подробные результаты приведены для ЦФ-10. По мере того, как максимальное число бит уменьшается, наблюдается рост ошибки $\tilde{e}_2'$. С увеличением М при фиксированном числе ненулевых бит достигается меньшее значение $\tilde{e}_2'$. При М = 12 для 4, 5 и 6 ненулевых бит значения $\tilde{e}_2'$ оказываются идентичными. Время счета на ЭВМ PDP1090 (KL10) составляет 43 и 22 с соответственно для ЦФ-9 и ЦФ-10 при М = 6 и трех ненулевых битах. В случае увеличения порядка этих ЦФ до N = 4 (два каскада) время счета увеличивается примерно в десять раз.

В алгоритме [66], основанном на методе случайных проб, поиск ведется в области, ограниченной условием устойчивости и требованием минимальной фазовости ЦФ. Применяется равномерное распределение случайных чисел в этой области. Коэффициенты содержат два ненулевых бита. В алгоритме нет никакой привязки к начальному непрерывному решению.

В качестве примера рассматривается каскадный ФНЧ 4-го порядка. При М = 6 после 300 случайных проб найдено допустимое решение с двумя ненулевыми битами в каждом коэффициенте. Время счета на ЭВМ ЕС-1033 составляет 1 мин 28 с. Длина программы, реализующей этот ЦФ на сигнальном процессоре, составляет 23 команды. Отмечается, что для реализации ЦФ Золотарева-Кауэра, удовлетворяющего тем же самым требованиям при М = 11, требуется 35 команд, т. е. в 1,5 раза больше. Однако в [75] для ЦФ Золотарева-Кауэра было найдено решение при М = 2 и числе ненулевых бит в каждом коэффициенте не более двух.

Прямой и локальный поиск. Работы [24, 55, 61] посвящены проблеме минимизации суммарного числа ненулевых бит в коэффициентах.

В [24] рассматриваются мостовые волновые ЦФ, которые обладают высокой чувствительностью АЧХ в полосе задерживания к квантованию коэффициентов, но имеют очень низкую чувствительность в полосе пропускания и обычно требуют меньшего числа умножителей по сравнению с лестничными волновыми и обычными каскадными структурами. При этом количество коэффициентов, как и задержек, равно степени передаточной функции.

В работе рассматриваются ЦФ, соответствующие дробным аппроксимациям аналоговых прототипов. Предлагаемый алгоритм основывается на модифицированном методе Хука и Дживса. Минимизации подвергается целевая функция в виде суммы двух составляющих, одна из которых несет информацию о максимальной ошибке $\tilde{e}_{\infty}$, а вторая - о суммарном числе ненулевых бит F (см. (6)). В процессе выполнения алгоритма подбирается и вариант структуры мостового ЦФ, что позволяет дополнительно улучшить решение задачи. После того как найдены дискретные значения коэффициентов, осуществляется подбор варианта реализации согласующих элементов структуры ЦФ - адаптеров (последовательный или параллельный) с целью максимизации отношения сигнал/шум округления. Для k адаптеров имеется 2k вариантов. Применение последовательного или параллельного адаптера не меняет найденных коэффициентов, но влияет на значения масштабных множителей, задаваемых равными степени два, и уровень шума округления. Таким образом, задача решается комплексно.

Было исследовано большое число ФНЧ и ПФ. Конкретные результаты приводятся для одного ПФ 12-го порядка и двух ФНЧ 7-го и 5-го порядков, используемых в трансмультиплексорах. Для этих ЦФ получены значения F = 21, 11 и 7 при М = 6, 5 и 6, соответственно. Число ненулевых бит в каждом коэффициенте для всех ЦФ не превышает 3. За счет оптимизации структуры и надлежащего масштабирования длину слов данных удается уменьшить на 2,2 и 1 бит соответственно для ПФ, первого и второго ФНЧ.

Работы [55, 61] посвящены синтезу передаточной функции ЦФ произвольной структуры. В [61] отмечается, что проблема минимизации F заключается по существу в решении двух задач: поиск наборов дискретных коэффициентов, приводящих к допустимым решениям во временной или частотной области, и определение в этом наборе вектора, соответствующего минимуму F. Исследуются алгоритмы прямого (метод Гаусса - Зейделя) и локального поиска. Кроме того, предлагается интерактивная процедура, которая позволяет разработчикам наряду с этими алгоритмами проверять собственные идеи, пользуясь набором предлагаемых программных средств. Эти средства включают ряд эффективных вспомогательных алгоритмов, таких как оценка изменений АЧХ для произвольной структуры ЦФ, вычисление F и др.

Рассматриваются три примера ЦФ. Для каскадного ФНЧ 5-го порядка, применяемого в системах с ИКМ, прямой поиск приводит к решению с F =19. Время счета на IBM VAX11/780 составляет 16 с. Дальнейшее применение локального поиска не уменьшает F. Интерактивная процедура, детально описанная в работе, позволяет получить F = 14 за 44,7 с. Для противоподменного волнового ЦФ 9-го порядка прямой поиск дает F = 33. Последующий локальный поиск приводит к F =20. Полное время счета 4,5 мин. Для волнового ЦФ 6-го порядка, используемого в мобильной связной системе, алгоритмом прямого поиска получено F = 16. Последующее применение локального поиска дает F = 14 Интерактивная процедура приводит к дополнительному улучшению, которому соответствует F = 12.

Методы ветвей и границ. В [14, 63, 67, 76] предложены алгоритмы минимизации F, основанные на методах ветвей и границ. Работы [63, 76] уже упоминались в связи с проблемой минимизации $\widetilde{e}_{\infty}$. Для получения решения с минимумом F этот алгоритм, включающий предварительную гауссову адаптацию, несколько модифицируется. При этом дискретная оптимизация проводится на неравномерно квантованном множестве значений коэффициентов с тем, чтобы оперировать коэффициентами, содержащими не более заданного числа ненулевых бит. После получения набора решений выбирается то, для которого F минимально. Если не удается найти такое решение, то число ненулевых бит увеличивается и поиск повторяется.

В качестве примера в [76] рассматривается вышеупомянутый каскадный ФНЧ 5-го порядка из[61]. Для процесса адаптации используется 1000 оценок $\widetilde{e}_{\infty}$. При М = 7 и числе ненулевых бит не более двух найдено 38 допустимых решений, 5 из которых имеют F = 10. В то же время в [61] получено F = 14.

В алгоритмах [14, 67] используется упрощенный метод ветвей и границ, не требующий реоптимизации коэффициентов на непрерывном множестве значений, как в [63, 76]. Весь процесс поиска ведется в некоторой ограниченной области равномерно квантованных коэффициентов.

В [14] процесс "ветвления" прекращается, если текущее значение F превышает ранее запомненное. В [67] при такой ситуации "ветвление" продолжается, но проверка АЧХ на допустимость (условия (5)) не выполняется и возобновляется, если только снова текущее значение F не станет меньше ранее запомненного. В [14] область поиска коэффициентов определяется как эллипсоид с центром, соответствующим непрерывному решению. Граница эллипсоида зависит от требуемого значения среднеквадратической ошибки АЧХ. Отмечается, что применение алгоритма дает существенное уменьшение значения F по отношению к исходному. В частности, для каскадного ПФ 8-го порядка F уменьшено со 191 при М = 16 до 33, т. е. в 5,8 раз.

В [67] область изменения определяется по другим соображениям. Пусть отклонение АЧХ обусловлено изменением на определенную величину всех коэффициентов, кроме i-го. Тогда область изменения i-го коэффициента определяется с учетом (5)и исходя из компенсации этого отклонения изменением i-го коэффициента. Приводятся расчетные соотношения. Поясняется, что определенные таким образом области изменения каждого коэффициента близки к оптимальным.

Для ряда ЦФ применение алгоритма позволяет снизить суммарное число ненулевых бит на 15 ... …20%. В частности, для каскадного ФНЧ 4-го порядка это число уменьшено с 21 до 16 при М = 6. Приводятся значения полученных коэффициентов. Общее число вариантов решений составило 3×10^{5}, из них только для 1400 вариантов проверялось условие (5). Время счета на ЭВМ ЕС-1022 составляет 15 мин.

Имитация процесса отжига. В алгоритмах [81, 83, 104, 105], основанных на имитации отжига, используется аналогия между процессом затвердевания специфических классов жидкостей и свойствами сходимости методов дискретной оптимизации. Так, позициям атомов соответствуют переменные оптимизации, энергии E физической системы целевая функция, состоянию с E_o на очень низкой температуре T_o - глобальный оптимум и т. д. [104, 105]. Это позволяет воспользоваться соотношениями статистической механики для управления процессом поиска решений задач дискретного программирования. Для температуры T нет аналога. Однако во время затвердевания этот параметр играет важную роль. Температура обычно уменьшается очень плавно и каждый раз система устанавливается в новое равновесие. При высоких T наблюдаются большие флуктуации энергии, но в конце процесса охлаждения значения энергии будут постепенно стабилизироваться. В конце концов система будет “заморожена” в одном состоянии с минимальной энергией.

Оригинальный алгоритм имитации отжига [104] состоит из двух основных циклов: во внешнем температура постепенно уменьшается, пока не зарегистрируется сходимость, а во внутреннем цикле осуществляется ряд перемещений в области изменения параметров. Стратегия генерирования перемещений зависит от конкретных применений. Согласно критерию Метрополиса, новый вектор параметров с разницей в энергии ΔE по сравнению с текущим оптимумом сохраняется, если только вероятность Больцмана $\exp(-\Delta E / T)$ превышает случайно выбранное число в интервале [0, 1]. Таким образом, увеличение целевой функции также допускается, но с экспоненциально уменьшающейся вероятностью в зависимости от разницы между текущим значением целевой функции и ранее запомненным промежуточным оптимумом. Такой подход позволяет преодолевать “ловушки” на локальных экстремумах.

Важным моментом является выбор эффективного режима отжига. Детально этот вопрос проработан в [105], где также описана программам реализующая алгоритм. Применение этой программы для характерных проблем цифровой фильтрации исследуется в [81], где, в частности, решается задача минимизации суммарного числа ненулевых бит в КЗРК коэффициентов.

Предполагается, что исходный вектор непрерывных коэффициентов квантуется исходя из удовлетворения требований к отклонению АЧХ. В реализованном алгоритме используются и программные средства, описанные в [61]. Перемещения во внутреннем цикле, упомянутом выше, выполняются тремя способами с различной вероятностью: ненулевые биты устраняются, сдвигаются на одну позицию или инвертируются. Такое изменение выполняется в одном или сразу в двух коэффициентах. Второй случай предпочтительнее на более низких температурах.

В отличие от некоторых существующих стратегий в алгоритме не требуется высококачественного начального решения. По сравнению с интерактивным алгоритмом [61], работа с которым сильно зависит от действий пользователя, затраты времени очень велики, но, по мнению авторов [81], остаются приемлемыми.

В качестве примеров приводятся результаты для 12 БИХ-фильтров 3 - 21-го порядка. Это каскадные, мостовые волновые и ЦФ на основе дискретных интеграторов “без потерь”. В большинстве случаев значение F было улучшено на 1… 5 бит(4,8...41,6%) по сравнению с результатами, полученными с помощью процедуры [61]. Время счета, в зависимости от ЦФ, составляет 0,2...520 мин на ЭВМ VAX 8680/VMS при числе итераций от 1 тыс. до 580 тыс. Заметим, что для каскадного ФНЧ 5-го порядка получено $F = 13$, что на 1 бит меньше значения, найденного с помощью алгоритма [61]. Однако в [76], как уже упоминалось выше, достигнуто решение с $F = 10$.

Отмечается, что для мостовых волновых ЦФ часто аппаратура может быть сэкономлена, если некоторые коэффициенты становятся нулевыми, даже за счет увеличения суммарного числа ненулевых бит. Так, для ЦФ 3-го порядка с тремя коэффициентами было найдено решение с $F = 3$.
При уменьшении числа коэффициентов до двух и увеличении F до четырех получено допустимое решение, которое позволяет использовать в структуре ЦФ два адаптера вместо трех.

Синтез передаточных функций КИХ-фильтров

Возможность получения строго линейных ФЧХ, независимо от того, квантованы или нет коэффициенты, и отсутствие проблемы предельных циклов вызывают большой интерес к разработке и применению КИХ-фильтров. Пример тому - работы [107-110], посвященные созданию специализированных СБИС КИХ-фильтров.

Для получения линейных ФЧХ достаточно, чтобы импульсные характеристики названных ЦФ были симметричны или антисимметричны. Это условие оказывается полезным и с точки зрения размерности задачи аппроксимации, поскольку оно приводит к уменьшению числа переменных в два раза.

Для КИХ-фильтров могут быть использованы алгоритмы дискретной оптимизации, разработанные применительно к БИХ-фильтрам. Однако очень высокий порядок (вплоть до 300) передаточных функций КИХ-фильтров, обусловленный получением хороших избирательных свойств, делает невозможным применение многих из этих алгоритмов.

Синтез передаточной функции КИХ-фильтра осуществляется для классических структур прямой формы или некоторых других конфигураций, составными частями которых являются структуры прямой формы. Как правило, интерес представляет оптимизация АЧХ в минимаксном смысле.
В этом случае проблема дискретной оптимизации может быть решена с помощью существующих общецелевых алгоритмов ЦЛП, приводящих к глобальному оптимуму. Однако при синтезе ЦФ средних и высоких порядков этими алгоритмами требуются значительные затраты машинного времени. Это и ряд других факторов стимулировали проведение исследовательских работ по созданию усовершенствованных версий алгоритмов ЦЛП и новых процедур, учитывающих специфику рассматриваемой проблемы и направленных на получение оптимальных или близких к таковым решений за приемлемое время.

Предлагаемые алгоритмы дискретной оптимизации, речь о которых пойдет ниже, основываются на методах ЦЛП, целочисленного квадратичного программирования (ЦКП), ветвей и границ в сочетании с алгоритмом Ремеза, 0-1 программирования, локального поиска, неявного перебора, вариации исходных параметров и имитации процесса отжига.

Для КИХ-фильтров в большей степени принято оперировать не порядком передаточной функции, а длиной импульсной характеристики (часто называемой длиной фильтра или числом отводов). В дальнейшем изложении под N будем понимать длину импульсной характеристики, соответствующую порядку передаточной функции N-l.

Минимизация длины слова коэффициентов и оптимизация характеристик

Почти все публикации, в которых рассматриваются алгоритмы синтеза передаточных функций КИХ-фильтров при ограниченной длине слова коэффициентов, посвящены задаче получения оптимальных АЧХ в минимаксном смысле, причем минимизируется ошибка $\tilde{e}_{\infty}^{1}$ при $A=1$ (см. (3)). Исключением являются работы [42, 43, 53], где для оптимизации АЧХ применен критерий наименьших квадратов на непрерывном множестве частот, и работа [60], в которой показана возможность получения желаемых АЧХ при некоторых дополнительных ограничениях, в частности, на поведение переходной характеристики ЦФ.

Каждый из предлагаемых алгоритмов может быть использован многократно с целью получения допустимого решения при минимальном М. Прежде чем познакомиться собственно с алгоритмами, рассмотрим, проблему минимизации М.

Стратегия минимизации М. Для КИХ-фильтров, также как и для БИХ-фильтров, поиск допустимого решения, соответствующего минимуму длины слова коэффициентов М, осуществляется путем многократного применения алгоритма дискретной оптимизации для ряда различных М. Исходное значение может быть предварительно оценено с помощью соотношений, полученных детерминированными или статистическими методами [18, 27, 34, 36, 37]. Последние дают лучшие результаты. В частности, для конкретного ФНЧ значения М равны 12 и 13 в случае применения детерминированных и 10 в случае статистических оценок, оптимизация приводит к М = 8 [37].

Длина слова может быть дополнительно уменьшена, если преднамеренно увеличить N. Эта проблема, применительно к структуре прямой формы и двум структурам на базе идентичных субфильтров прямой формы [106], исследована в [36]. На основе эмпирических/статистических соотношений показано, что существует минимальное значение длины слова, дальнейшее уменьшение которого не позволяет получить требуемый уровень пульсаций АЧХ, даже если $N \to \infty$. Структуры на базе субфильтров позволяют часто получить значительно меньшие М, но произведение (М+1)N, характеризующее сложность ЦФ, сохраняется примерно таким же, как и для прямой формы.

Существование нижней границы на М подтверждено экспериментально в [34, 36], путем применения алгоритма дискретной оптимизации для многих ЦФ. Полученные (М+ l)N и М несколько меньше их теоретических оценок. Разница в значении М составляет несколько бит и растет с увеличением отношения уровней пульсаций в полосе пропускания и задерживания.

Коэффициенты КИХ-фильтров имеют большой разброс по величине. Поэтому для представления малых значений требуется достаточно большая длина слова. В [29] апробирована идея разделения коэффициентов на две группы - малых и больших значений. Малые коэффициенты масштабируются путем умножения на 2^n и вместе с коэффициентами второй группы квантуются с шагом $q = 2^{-M}$. Фактически коэффициенты первой группы квантуются с шагом $q = 2^{-n-M}$. Поэтому структуры, в которых используется такой прием, названы автором [29] структурами с двумя шагами квантования. Новая конфигурация позволяет уменьшить длину слова М ценой добавления лишь одного вспомогательного множителя 2^{-n}, выполняющего функцию демасштабирования.

Для широкополосного дифференциатора с N=22, выполненного по классической структуре, получено М=12 и М=10 соответственно после простого округления коэффициентов и применения алгоритма ЦЛП. Для структуры с разделением коэффициентов аналогичные М равны 9 и 6. Минимальные статистические длины слова, найденные методом [18], равны 11,6 и 10,28 соответственно для классической и новой структуры.

Таким образом, если длина слова коэффициентов не достаточно мала, то можно попытаться уменьшить ее, используя вышеописанные приемы.

Методы ЦЛП. Ряд работ [16, 25, 29, 34, 36, 37, 52] посвящен исследованию возможности применения метода ветвей и границ Ланда и Дойга. Суть этого метода ЦЛП заключается в многократном решении линейных субпроблем на непрерывном множестве значений переменных. По мере “ветвления” переменные (в нашем случае коэффициенты передаточной функции) дискретизируются. При этом число непрерывных переменных в каждой последующей субпроблеме уменьшается, что ускоряет процесс ее решения.

В [16, 34] применяются существующие общецелевые программы ЦЛП. При этом отмечается [34], что эти программы не идеально подходят для целей синтеза КИХ-фильтров при ограниченной длине слова коэффициентов, но их использование позволяет более глубоко понять эту проблему.

Автором [34] синтезировано более 50 ЦФ. Из-за ограничения памяти применяемой ЭВМ (CDC Cyber 72) исследованы Ц.Ф с $N \leq 40$, но главным ограничением, по мнению автора [34], является все же время расчета. Для некоторых случаев это время в несколько сотен раз больше, чем необходимое для получения оптимального решения с непрерывными коэффициентами при помощи программы из [95].

Представлены два частных примера синтеза ФНЧ (при N=21, М=6 и N=40, М=9), ранее рассмотренных в [16]. Приводятся АЧХ, иллюстрирующие улучшение решений, полученных методом простого округления. В полосе задерживания для каждого Ц.Ф ослабление улучшено примерно на 5 дБ, а в полосе пропускания характеристики очень близки. Для ряда ЦФ с N= 6... 40 и М = 2...14 различие округленных и оптимальных коэффициентов не превышает 4q.

Отмечается, что применение других алгоритмов, таких как прямой 0-1 поиск и алгоритм Гомори, не имели успеха в большинстве случаев и не использовались автором [34] после ряда попыток.

Преодолеть ограничения на N можно путем использования упомянутых выше структур на основе идентичных субфильтров. В этом случае результирующее значение N может быть достаточно большим, а для субфильтра по-прежнему $N_c \leq 40$ (индекс означает отношение к субфильтру). В [36] рассмотрен ФНЧ. Ослабление АЧХ в полосе задерживания должно быть больше 80 дБ, а неравномерность в полосе пропускания не более 1 дБ.

Передаточная функция

$$H(z) = H_c^3(z)(10 - 15H_c(z) + 6H_c^2(z)).$$

Алгоритм ЦЛП приводит к допустимому решению при N_c = 35 и M = 7. Результирующее значение N = 5×35 = 175, параметры АЧХ: $\widetilde{a}_0$ = 81 дБ, $\Delta\widetilde{a}$ = 0,8 дБ. Применение метода простого округления для рассматриваемой структуры приводит к $\widetilde{a}_0$ = 63 дБ при том же самом значении $\Delta\widetilde{a}$.

Хотя непосредственное применение стандартных программных средств дает хорошие результаты, свойственные им большой объем памяти и существенные временные затраты стимулировали работы по усовершенствованию методов ЦЛП [37, 52].

В существующие программы предлагается ввести целый ряд полезных модификаций [37]. Так, разработчик может прервать вычисления или изменить допуски на отклонение АЧХ. Это уменьшает время счета и требуемую память. Для задач с большим числом переменных хорошие решения находятся достаточно быстро и длительное время вычисления требуется лишь для некоторого их улучшения или доказательства оптимальности.

Поскольку время существенно зависит от очередности перечисления коэффициентов, то первыми желательно обрабатывать наименьшие коэффициенты, так как их изменение наиболее сильно влияет на отклонение АЧХ.

Для ЦФ с очень большими N (>63) предлагается разделять коэффициенты на два набора, а затем поочередно фиксировать один и оптимизировать другой набор. Дано достаточно детальное пояснение этого подхода.

Важным фактором, влияющим на скорость получения решения и его оптимальность, является размер области изменения дискретных коэффициентов вокруг непрерывного оптимума. Вводится понятие m-окрестность. Только m младших бит коэффициентов подлежит изменению в процессе поиска решения. Особо выделен случай единичной окрестности (m = 1).

На конкретных примерах иллюстрируется эффективность применяемых алгоритмов. Результаты сравниваются с решениями, полученными методом простого округления.

Для ФНЧ с N=33 при M= 12, 10, ... , 4 ослабление АЧХ в полосе задерживания удается улучшить на 5...7 дБ. Если поиск решения вести в единичной окрестности изменения коэффициентов, то это улучшение составляет 3…5 дБ. Время счета на IBM 370 равно 1,8 с для получения решения с непрерывными коэффициентами, 9,6 с при поиске в единичной окрестности, 790 с для получения оптимального решения и 1560 с для доказательства оптимальности. Дискретным решениям соответствует M = 12.

Применение алгоритмов, исследованных в [34,37], сопряжено с двумя трудностями [52]. Во-первых, время счета остается относительно большим, даже если изменение коэффициентов ограничено малой окрестностью вблизи непрерывного решения. Во-вторых, для хранения чисел требуется очень большой объем памяти, что не позволяет осуществить упомянутые алгоритмы на микро-ЭВМ.

Для решения непрерывных субпроблем предлагается использовать специальный алгоритм линейного программирования, учитывающий особенности решения аппроксимационной задачи в чебышевском (минимаксном) смысле. Такой алгоритм хорошо известен, характеризуется значительно меньшим объемом памяти и является более быстрым.

Для ЦФ с N=33 требуемый объем памяти сокращается на 37,5%. Для больших N экономия составляет примерно 50%.

В качестве примера приводятся результаты для ПФ с N=31 при M=7. Полученная АЧХ отличается на 0,3...2 и 2...3 дБ от АЧХ, соответствующих непрерывному решению и полученному путем простого округления коэффициентов. Предложенный подход был апробирован более чем на 50 примерах ЦФ и дал хорошие результаты. Для синтеза Ц.Ф с N=l5 требуется в 18,5, 194 и 333 раза больше времени (соответственно при поиске в единичной окрестности, для получения оптимального решения и доказательства оптимальности), чем при получении непрерывного оптимума. Сопоставление временных затрат для ЦФ, рассмотренных в [34, 37], не проведено, поскольку автором [52] использовались более медленные ЭВМ (H11 - LS 111 и Wang VS2200) .

Метод ЦКП. Разработке и применению алгоритма ЦКП посвящены работы [42, 43, 53]. Алгоритмы ЦЛП могут гарантировать нахождение глобально оптимального решения в минимаксном смысле, однако требуют больших вычислительных затрат. Время счета растет примерно экспоненциально с увеличением N. Добавление одной дискретной переменной удваивает затрачиваемое время, а для N=120 требуется примерно 10^{15} с (1 год $\approx 3\times 10^{7}$ с) работы IBM 3033. Поэтому применение алгоритмов ЦЛП ограничено значениями N $\leq$ 40.

В связи с этими фактами в [42, 53] предлагается новый субоптимальный алгоритм ЦКП для синтеза ЦФ высоких порядков. Время счета растет пропорционально N^3. При этом требуется лишь несколько минут для синтеза ЦФ с N=120 или N = 250, АЧХ которых удовлетворяет минимаксным и среднеквадратическим требованиям, соответственно. Большая эффективность относительно второго критерия обусловлена тем, что основой предлагаемого алгоритма является метод наименьших квадратов, используемый в цикле дискретной оптимизации. Последняя базируется на технике ветвей и границ.

Здесь следует сделать некоторое отступление. С момента публикации [53]) эффективность применяемых вычислительных средств значительно повысилась. Поэтому в [90] предельные возможности ЦЛП были уточнены. На основе усредненных экспериментальных данных, полученных на ЭВМ NEC SXIA (максимальное быстродействие 667 мегафлоп/с) для N = 40, 50,…,80, сделаны следующие заключения.

Если решаемая задача, требующая нескольких секунд компьютерного времени, рассматривается как тривиальная, то синтез ЦФ с N<40 является тривиальной задачей. Если несколько часов компьютерного времени может быть отведено на решение задачи, то ЦЛП применимо для ЦФ с N $\leq$ 70. Таким образом, пригодность ЦЛП для синтеза ЦФ значительно расширяется. Очевидно, что и характеристики алгоритма ЦКП [42, 53], речь о котором идет ниже, могут быть уточнены подобным образом.

Критерию наименьших квадратов соответствует ошибка вида

$$J=\int_0^{\pi} W(\omega)\left|H(\omega)-D(\omega)\right|^2 d\omega\,, \qquad (8)$$

определяемая в отличие от (3) на непрерывном множестве частот. Здесь $\omega=2f\pi$. Значение J вычисляется аналитически. В [53]) приведены соответствующие выражения.

Для того чтобы получить минимаксное решение, используя метод наименьших квадратов, предлагается модифицировать весовую кусочно-постоянную функцию W(). Так, например, проблема синтеза ФНЧ трактуется как многополосная, а не как двухполосная. Функция W() в этих полосах различна и устанавливается интерактивным путем. Поскольку процесс получения непрерывного решения занимает гораздо меньше времени, чем дискретная оптимизация, то эта процедура выполняется для непрерывных коэффициентов.

Отмечается, что метод наименьших квадратов имеет и самостоятельные прямые применения, на пример, при моделировании систем, подавлении шума и других приложениях винеровской фильтрации.

Алгоритм ветвей и границ основывается на известной стратегии, сочетающей “поиск в ширину и глубину”. Выбирается коэффициент и фиксируется на L различных дискретных значениях в соседстве со своим непрерывным значением. Решаются L непрерывных субпроблем для оставшихся непрерывных коэффициентов. Выбирается второй коэффициент и фиксируется на L дискретных значениях. Решается L непрерывных субпроблем, выбирается L лучших по J результатов, фиксируется следующий коэффициент и т. д. до тех пор, пока все переменные не станут дискретными. Не все L значений J требуются. Это обусловлено квадратичной поверхностью J.

Фиксация коэффициентов осуществляется в порядке уменьшения так называемой относительной коэффициентной чувствительности. Вычисления, связанные с определением непрерывных коэффициентов при решении субпроблем, выполняются на основе матричных операций.

В [53] приводятся результаты, иллюстрирующие эффективность предложенного алгоритма при L =6.

Для ФВЧ с f_1=0,37, f_2=0,4, $\Delta a_{\max}$=0,1 дБ, $a_{0\min}$= 80 дБ требуется получить решение для M=16 при минимальном N. В случае непрерывных коэффициентов N=117. Поиск дискретных решений выполняется для N<.l35 (N-нечетное). Метод выравнивания статистической длины слова [18] не дает допустимого решения. С помощью предложенного алгоритма найдено допустимое решение с N=121. При этом использовано 14 значений весовой функции для аппроксимации минимаксного критерия. Отыскание этой функции занимает 30 с. Дискретная оптимизация требует 160 с. Полное время равно 190 с.

Для ФНЧ с f_1=0,1, f_2=0,14, $\Delta a_{\max}$=0,5 дБ, $a_{0\min}$= 60 дБ требуется найти решение при M=12 и минимальном N. Для непрерывных коэффициентов N=60. Поиск дискретных решений ведется для N<90. Техника выравнивания не дает допустимого решения. Предлагаемый алгоритм приводит к решению с N =63. Использовано 11 значений весовой функции. При N=62 техника выравнивания приводит к решению лишь при M=l4.

Для ПФ с f_1=0,05, f_2=0,1, f_3=0,3, f_4=0,35 при M=15 требуется получить решение, оптимальное в смысле критерия наименьших квадратов. В полосах задерживания W() =1,а в полосе пропускания W() = 10. Приводятся зависимости J от N = 75, 85,…,105, которые иллюстрируют существенное улучшение результатов, полученных простым округлением коэффициентов.
В частности, при N= 105 предложенный алгоритм позволяет уменьшить значение J примерно в 5раз. Заметим, что в [43] аналогичные зависимости приводятся для других граничных частот ПФ и N=55, 65, 95, где наибольшее уменьшение J (примерно в 5 раз) получено для N=85.

Проведенные исследования показывают, что с увеличением L время счета растет примерно пропорционально, а J уменьшается, причем, начиная с L = 3, очень слабо.

Отмечается, что субоптимальные алгоритмы не гарантируют, что решение с большим N будет, по крайней мере, таким же хорошим, как решение с меньшим N. Это явление очень часто наблюдается для метода простого округления и редко встречается для предложенного алгоритма.

Метод ветвей и границ и алгоритм Ремеза. Синтез оптимальных в минимаксном смысле КИХ-фильтров на непрерывном множестве значений коэффициентов наиболее эффективен при использовании алгоритма замены Ремеза [95]. Этот алгоритм обладает гораздо более высокой скоростью сходимости по отношению к алгоритмам линейного программирования. Поэтому было предположено, что аналогичный эффект можно ожидать и в случае использования алгоритма Ремеза для решения непрерывных субпроблем в методе ветвей и границ при поиске дискретных коэффициентов. Применение этого алгоритма становится возможным благодаря дискретизации коэффициентов с наибольшими индексами и вычитанию их “действия” на желаемую и аппроксимирующую функции. При этом на каждом уровне «ветвления» целевая функция модифицируется. Идея использования алгоритма Ремеза, таким образом, была впервые описана Стэпаном в [21, 33]. Дальнейшие исследования и развитие этого подхода выполнены в работах [35, 39, 60, 79].

В [35] сделан целый ряд предложений для ускорения процесса поиска оптимального решения.

Применение алгоритма Ремеза требует задания начального набора частот для определения итеративным путем частот альтернанса. Обычно задается равномерная сетка. По окончании алгоритма определяется истинный набор частот.

Предлагается использовать найденные частоты решенной субпроблемы в качестве начальных для решения последующей субпроблемы на том же уровне “ветвления”. Это позволяет вдвое уменьшить число итераций. При этом, как было обнаружено, не всегда гарантируется корректность выполнения алгоритма Ремеза. Однако такие случаи редки и легко устраняются путем возврата к равномерной сетке.

Число операций в алгоритме Ремеза пропорционально количеству частотных точек, на которых оценивается целевая функция. Обычно используется достаточно плотная сетка частот. Предлагается все оценки, за исключением последней, выполнять на малом числе точек (в 8 и более раз меньшем, чем обычно), поскольку-при решении субпроблем точных оценок не требуется. Однако если текущая оценка оказывается меньше ранее сохраненного оптимума, осуществляется возврат к плотной сетке частот. Это делается для того, чтобы при больших M (>6) ошибки в оценках не приводили к чрезмерному росту "дерева" поиска. Использование этой адаптивной техники увеличивает скорость выполнения алгоритма в 3 - 5 раз в зависимости от M и требований к АЧХ.

Предложена также стратегия "ветвления", уменьшающая число итераций в методе ветвей и границ примерно на 20% в большинстве испытанных случаев. Кроме того, для останова процесса "ветвления" вводится нижняя граница на ошибку минимаксной аппроксимации.

Проведенные исследования показывают, что для ЦФ с N от 20 до 80 и M=2…14 время счета на ЭВМ IBM 360/91 равно 10...300 с. Для ФНЧ с N=40, M=9 время счета на ЭВМ CDC Cyber 72 равно 162 с. При использовании универсальной программы, такой как в [34], для синтеза этого ФНЧ требуется 7951 с.

Описанный выше алгоритм предлагается несколько модифицировать [60]. Во-первых, в применяемом алгоритме Ремеза устраняется процедура обратного преобразования Фурье. Во-вторых, текущая оценка внутри алгоритма Ремеза сопоставляется с ранее найденным оптимумом, и, если превышает его, то этот алгоритм прерывается и осуществляется переход к решению следующей субпроблемы. Эти две простые модификации ускоряют процесс получения оптимального решения в 3-4 раза. Однако, по мнению автора [60], они не являются кардинальным средством для быстрого нахождения оптимума в случае ЦФ высоких порядков.

В работе также показано, что модифицированный алгоритм может быть применен при дополнительных ограничениях. Это позволяет синтезировать ЦФ с заданным числом ненулевых бит в коэффициентах, с ограничением на величину выброса в переходной характеристике и многополосные ЦФ, используемые при прореживании и интерполяции.

Для трехполосного ФНЧ с N = 23, M = 7 максимальная ошибка уменьшена более чем в 2 раза относительно значения, полученного методом простого округления. Для ФНЧ с N = 25, M = 5 найденное решение неприемлемо по максимальному уровню выброса в переходной характеристике. Алгоритм с дополнительно введенным ограничением позволяет получить решение с уровнем выброса, уменьшенным в 4 раза.

Дальнейшее сокращение времени счета достигнуто в [79]. Для каждого узла "ветвления" вводится функция нижней границы. Благодаря свойствам выпуклости этой функции (в статье сформулирована и доказана теорема) значительно уменьшается число оценок целевой функции, что позволяет экономить время счета. Для ряда ФНЧ и ПФ с N=15 и N=25 при M=5 и M=7 время сокращается в 1,7-3,4 раза и составляет 1,96...,133,47 с на IBM 4341.

0-1 программирование. Любую целочисленную задачу можно записать в 0-1 (или булевых) переменных. В [27, 34, 37] исследованы различные 0-1 алгоритмы. Применение прямого поиска не имело успеха [34]. Два других алгоритма, речь о которых пойдет ниже, приводят к хорошим результатам в отношении оптимума, времени счета и объема памяти.

В [27] предлагается использовать псевдобулеву технику, которая заключается в комбинировании динамического и 0-1 программирования. Суть предложенного алгоритма заключается в многократном решении системы линейных псевдобулевых неравенств, записанных для ряда частот экстремумов ошибки аппроксимации. Количество 0-1 переменных равно числу искомых коэффициентов передаточной функции. Решение системы осуществляется раздельно для каждого неравенства в определенной последовательности с помощью набора правил, приведенных в статье. После очередного решения системы получается ряд вариантов. На равномерной сетке частот устанавливается лучший из них. Для экстремальных частот и максимальной ошибки этого решения записывается новая система неравенств и все повторяется до тех пор, пока наблюдается улучшение в АЧХ. Исходная передаточная функция с непрерывными коэффициентами может быть получена на основе обратного преобразования Фурье от идеальной АЧХ, но предпочтительнее использовать алгоритм Ремеза.

Для ФНЧ с N=25 получены следующие результаты: непрерывному оптимуму отвечает e'_∞=0,01245, при M=7 значение $\tilde{e}'_\infty$=0,02 и 0,0167 соответственно в случае простого округления коэффициентов и после применения предлагаемого алгоритма оптимизации. Для ПФ с N=33 аналогичные значения равны 0,0015, 0,0126 и 0,0044, а для преобразователя Гильберта с N=21 – равны 0,02, 0,0424 и 0,03315. Последние два значения получены при M = 6. Для этих трех ЦФ максимальное отличие оптимальных коэффициентов от найденных простым округлением составляет q, 4q и 2q.

Время счета на ICL1909 для ЦФ с 12 коэффициентами равно 7 мин. Для подобного ЦФ использование модифицированного прямого поиска требует 10 мин на более быстрой ЭВМ CD3300 [6]. Случайный поиск, по мнению авторов [27], требует больших вычислительных затрат.

В [37] обсуждаемая проблема формулируется как задача 0-1 целочисленного линейного программирования. Это позволяет использовать стандартные пакеты программ. Предлагается допускать к вариации только m младших бит в двоичной представлении коэффициентов, что уменьшает число 0-1 переменных. При таком ограничении алгоритм отличается более высокой скоростью сходимости от алгоритмов ЦЛП. Так, для уже упоминавшегося ФНЧ с N=33 и M=12 при допущении к вариации 5 бит время счета сокращается более чем в 2 раза.

Локальный поиск. В [39] проведено сопоставление оптимального и субоптимального алгоритмов синтеза ЦФ. Под оптимальным понимается метод ветвей и границ в сочетании с алгоритмом Ремеза, а под субоптимальным-один из возможных алгоритмов локального поиска.

Суть локального поиска: исследуется окрестность начальной точки; если находится лучшее решение, то исследуется окрестность этого решения и т. д., иначе останов. Начальное решение получается округлением непрерывных коэффициентов. Установлено, что изменение на каждой итерации сразу двух коэффициентов предпочтительнее изменения одного. Поиск в окрестности ±q осуществляется с помощью стратегии первого улучшения при рандомизации перечисления коэффициентов.

Сопоставление оптимального и субоптимального алгоритмов проводится для ФНЧ и ПФ с пятью вариантами требований к АЧХ. Всего 11 примеров с N = 15, 25 и 35 при M = 4, 5 и 6. Для четырех ЦФ решения, полученные локальным поиском и методом ветвей и границ, совпадают. В наихудшем случае полученная максимальная ошибка отличается от оптимального значения в 1,27 раз. В зависимости от ЦФ выигрыш по времени счета достигает нескольких единиц или десятков раз. Таким образом, в тех случаях, когда имеются ограничения на время счета, например, при больших N и/или низком быстродействии используемой ЭВМ, разработчики могут применить простые алгоритмы локального поиска. Хотя предложенный алгоритм дает хорошие результаты, авторы [39] полагают, что для ЦФ высоких порядков необходим практичный алгоритм, гарантирующий качество решения.

Неявный перебор. По мнению автора работ [45, 73, 74], методы ветвей и границ, а также локального поиска требуют больших вычислительных затрат при синтезе ЦФ высоких порядков. В связи с этим предлагается новый подход, направленный на экономию времени вычисления.

Передаточная функция ЦФ представляется в виде произведения двух функций низкого и высокого порядка, что эквивалентно каскадному соединению двух ЦФ. Первая функция имеет целочисленные коэффициенты и используется для модификации весовой и желаемой функции. В результате применения алгоритма Ремеза находятся непрерывные коэффициенты второй функции.

Далее с помощью метода неявного перебора минимизируется среднеквадратическая ошибка АЧХ на дискретном множестве значений коэффициентов. Для экономии времени вычисления эта ошибка оценивается во временной области, а в процедуре дискретной оптимизации коэффициенты разделяются на малые группы. Переход из частотной области во временную осуществлен на основе соотношения Парсеваля.

Предлагаемый подход, апробирован для ФНЧ с N = 200 при M = 8, 10, 12 и 14[73]. Порядок передаточной функции с целочисленными коэффициентами равен 4. Алгоритм позволяет значительно улучшить АЧХ (как в полосе пропускания, так и задерживания), соответствующую округленным коэффициентам ЦФ прямой формы. Эти улучшения эквивалентны уменьшению длины слова коэффициентов примерно на 3 бита. Время счета на ЭВМ NEC ACOS900 составляет 97 с.

Вариация исходных параметров. Как уже отмечалось, существует бесконечное множество решений с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющих заданному плану допусков на отклонение АЧХ. Поэтому можно попытаться выбрать такое исходное допустимое решение, которое после простого округления коэффициентов осталось бы таковым. Лишь в [43] были проведены некоторые исследования такого подхода.

Для данного N методом линейного программирования находится некоторое приемлемое решение. Далее полученные коэффициенты, соответствующие этому-решению, округляются до M бит и осуществляется контроль АЧХ на допустимость. Если нарушены требования только в полосе задерживания, то при том же N находится другое решение с непрерывными коэффициентами, которому отвечает АЧХ с увеличенными значениями ослабления в полосе задерживания и неравномерности в полосе пропускания. При нарушении требований, в полосе пропускания эти параметры уменьшают. Граничными частотами также можно манипулировать.

В качестве примера рассматривается ФНЧ. Используется более 100 исходных непрерывных решений с $N \leq 50$. Девять из них после округления коэффициентов до M= 7 оказываются приемлемыми. Лучший результат получен при N=45, который показывает незначительное нарушение требований в полосе пропускания. Попытки улучшить решение за счет вариации граничной частоты этой полосы не имели успеха. С другой стороны, заданные допуски могут быть удовлетворены при N = 38 и M = 7. Такое решение найдено с помощью алгоритма ЦЛП.

Имитация процесса отжига. Работы [71, 84, 85] посвящены исследованию алгоритмов на основе метода имитации отжига, суть которого была пояснена в данном обзоре применительно к синтезу БИХ-фильтров.

Алгоритмы ЦЛП характеризуются экспоненциальным ростом времени счета при увеличении числа коэффициентов ЦФ. Применение локального поиска значительно сокращает временные затраты. Однако при этом свойственно “застревание” на локальных оптимумах, особенно для ЦФ с большими N. Поэтому использование алгоритмов из [34, 39] для ЦФ с N > 50 оказывается непрактичным. Процедуры, основанные на имитации отжига, позволяют обходить локальные оптимумы и по сути своей при фиксированной температуре представляют собой локальный поиск. Для обсуждаемой задачи можно получить хорошее начальное приближение путем округления непрерывных коэффициентов, соответствующих минимаксному решению. Следовательно, вряд ли можно ожидать улучшения целевой функции путем использования полного процесса отжига. Поэтому желательно зафиксировать температуру, полагая, что система находится уже в охлажденном состоянии. При этой температуре применяется упоминавшаяся выше стратегия Метрополиса, позволяющая обходить локальные оптимумы.

Все эти доводы были изложены и подкреплены результатами расчетов в [71]. Температура определяется как

$$T \cong \frac{1}{2\ln(\frac{N+1}{2}\sqrt{2})}.$$

Изменение сразу двух коэффициентов на каждой итерации происходит случайно в окрестности ±q.

В качестве примеров рассматриваются ФНЧ и ПФ с N = 25 и N = 35 при M = 4 и M = 6, всего 8 вариантов. Используется 10 запусков двух сопоставляемых алгоритмов при рандомизированной очередности перечисления коэффициентов. Решение с наименьшим значением целевой функции принимается за оптимальное. В четырех случаях максимальная ошибка, найденная алгоритмом локального поиска [39], была уменьшена в 1,03-1,15 раз. Для трех ЦФ результаты идентичны и лишь для одного ЦФ предложенный алгоритм приводит к большему в 1,2 раза значению ошибки.

По мнению авторов [71], предлагаемый подход может быть использован для получения оптимальных решений, близких к минимаксным за приемлемое время.

Как отмечается авторами [84, 85], основными достоинствами предлагаемого ими алгоритма на основе метода имитации отжига является независимость от типа структуры ЦФ и вида целевой функции. Кроме того, не требуется задание хорошего начального решения и изобретения эвристических правил, что делает алгоритм очень простым в программировании и гибким в применении. Основной недостаток-это время счета, которое на один-два порядка выше, чем в случае использования других алгоритмов. Однако авторы полагают, что сохранение малого времени счета - задача менее важная (это время становится приемлемым благодаря использованию быстродействующих ЭВМ), чем задача сохранения малого времени на разработку программ.

В отличие от алгоритма [71] предлагается: использовать полный режим отжига для 20 значений температуры при коэффициенте ее понижения, равным 0,9; новый вектор коэффициентов получать путем генерирования случайного приращения при допущении любых дискретных значений в диапазоне, не превышающем по модулю 1; начальное приближение выбирать произвольно. Также, как и в [71], используется критерий Метрополиса для принятия решения о сохранении или отбрасывании нового вектора коэффициентов.

Алгоритм апробирован для следующих требований к ЦФ:

A: ФНЧ, $f_1 = 0{,}2$, $f_2 = 0{,}25$, $W(f) = 1$;

B: то же, что и A, но в полосе задерживания $W(f) = 10$;

C: ПФ, $f_1 = 0{,}12$, $f_2 = 0{,}2$, $f_3 = 0{,}34$, $f_4 = 0{,}42$, $W(f) == 1$;

D: то же, что и C, но в полосах задерживания $W(f) = 10$.

В табл. 4 приведены результаты, в том числе полученные и с помощью других алгоритмов. Обозначение типа A25/4 означает ЦФ с требованиями A, N = 25 и M = 4. Сокращения ВГ и ЛП означают алгоритмы ветвей и границ и локального поиска. Для алгоритма [85] указаны два значения $\tilde{e}'_\infty$. Первое соответствует исходным коэффициентам, равным нулю, а второе значение (в скобках) - округленным коэффициентам непрерывного решения. Различия невелики, но лучшие решения получены при использовании в качестве исходных округленных коэффициентов. Как следует из табл. 4, найденные в [85] решения сравнимы или несколько лучше полученных другими алгоритмами.

При фиксированном значении T время счета на ЭВМ CDC Cyber 810 с операционной системой NOS 2 (быстродействие 1 млн. операций/с) составляет 2,0…4,8 с в зависимости от ЦФ и вектора исходных коэффициентов.

Таблица 4

Ошибки $\tilde{e}'_\infty$, полученные для ряда ЦФ различными алгоритмами

Алгоритм	$\tilde{e}'_\infty$					
	A25/4	B25/6	B35/6	C25/4	D25/6	D35/6
ВГ[39]	0,1875	0,2157	0,1907	0,1262	0,1306	-
ЛП[39]	0,1875	0,2303	0,2979	0,1613	0,1306	0,1124
[71]	-	0,2298	0,2564	0,1449	0,1306	0,1340
[85]	0,1875 (0,1875)	0,2368 (0,2177)	0,2807 (0,2301)	0,1262 (0,1262)	0,1740 (0,1431)	0,1734 (0,1720)

Помимо представленных в табл. 4 результатов приводятся данные для ЦФ A40/9. После запуска алгоритма при начальном значении T = 2 через 14,5с найдено решение с уровнями пульсаций 0,01408 и 0,01884 соответственно в полосе пропускания и задерживания. Этот результат лучше полученного в [34]. Отмечается: несмотря на то, что предлагаемый алгоритм на основе метода имитации отжига более медленный, он открывает новые перспективы в проектировании ЦФ, удовлетворяющих одновременно многим требованиям, например, в случае получения заданных частотных и временных характеристик. Время счета может быть уменьшено благодаря применению быстродействующих ЭВМ и более отрегулированных версий алгоритма.

Уменьшение числа ненулевых бит

С точки зрения минимизации аппаратурных затрат на реализацию ЦФ предпочтительнее минимизировать суммарное число ненулевых бит в представлении коэффициентов при ограничении на уровень ошибки $\widetilde{e}_p$ (или $\widetilde{e}_p^{'}$). Однако в отношении к КИХ-фильтрам почти все статьи посвящены решению обратной задачи, а именно минимизации указанной ошибки при ограниченном числе ненулевых бит (обычно 1,......,3). При этом интересуются получением АЧХ, оптимальной в минимаксном смысле. Реже применяется критерий наименьших квадратов. Лишь в [92] затронута проблема введения дополнительных требований к проектированию ЦФ, в частности, одновременно оптимизируются АЧХ и импульсная характеристика.

Многие алгоритмы, рассмотренные в предыдущем разделе, применимы и для поиска решений с малым числом ненулевых бит в представлении коэффициентов. Это облегчает последующее изложение, в котором внимание сосредоточено на особенностях решения обсуждаемой проблемы и полученных результатах.

Методы ЦЛП. Применению методов ЦЛП посвящены статьи [28, 32, 43, 51, 82, 90].

В [28] исследуются два алгоритма. Первый алгоритм подходит для синтеза ЦФ невысоких порядков и основывается на сочетании методов линейного программирования и перебора.

Сначала синтезируется ЦФ- с непрерывными коэффициентами. Затем осуществляется квантование наибольшего по абсолютной величине коэффициента. Оставшиеся непрерывными коэффициенты реоптимизируются путем применения алгоритма линейного программирования. Процесс квантования и реоптимизации продолжается в порядке уменьшения абсолютных значений коэффициентов.

Если требования к АЧХ при всех квантованных коэффициентах удовлетворяются, то задача решена. Иначе порядок ЦФ увеличивается на 2, что выражается в добавлении еще одного коэффициента C_i^*, равного C_{i-1}^*, и выполняется перебор пяти выбранных коэффициентов, включая вновь введенный. Большим коэффициентам соответствует и больший диапазон изменения. Для пяти коэффициентов, принимающих 7, 7, 7, 5 и 3 значений, существует 5145 вариантов. Если решение оказывается недопустимым, то порядок увеличивается на 2, и процедура перебора повторяется с вновь выбранными коэффициентами. Этим способом синтезирован ФНЧ с N = 18.

Второй алгоритм основан на стратегии ветвей и границ, подобной предложенной Дакиным. Все непрерывные субпроблемы в этом алгоритме решаются как задачи линейного программирования симплекс-методом.

Вначале усиление A в (3) полагается равным 1. После решения непрерывной задачи коэффициент с максимальным абсолютным значением фиксируется, а усиление A допускается к вариации при ограничении снизу значением 0,95. После решения новой линейной задачи все коэффициенты и ограничения масштабируются так, чтобы коэффициент с максимальным абсолютным значением точно равнялся степени числа два. Далее применяется метод ветвей и границ.

В качестве примера приводится АЧХ синтезированного ФНЧ, удовлетворяющего требованиям МККТТ для канала с ИКМ. ФНЧ состоит из двух каскадов, каждый с N= 32. В случае непрерывных коэффициентов N = 38.

В [32] отмечается, что желательно при p=∞ минимизировать функцию (2), а не (3), но в этом случае непосредственно применить ЦЛП невозможно, так как (2) нелинейна. Предлагается обойти это затруднение введением новой целевой функции

$$\tilde{e}_{\infty}^{''} = \tilde{e}_{\infty}^{'} - \alpha\ A, \qquad (9)$$

минимум которой при условии правильного выбора а соответствует минимуму (2), т. е. $\tilde{e}_{\infty}$. Параметр α устанавливается путем проб.

Как показывают исследования, относительный уровень пульсаций АЧХ после минимизации $\tilde{e}_{\infty}^{''}$, а не, $\tilde{e}_{\infty}^{'}$ может быть значительно уменьшен. Для ФНЧ в зависимости от N= 11, 13, 31 улучшение составляет 1,4...8 дБ. Непрерывные оптимумы лучше полученных дискретных на 0,2...13 дБ, причем большие отличия характерны для ЦФ более высоких порядков. Введение модификации не сказывается на времени счета. В зависимости от N это время равно 0,4......11,3 с на ЭВМ CDC 6600.

В [43] приведены результаты, полученные с помощью общецелевого алгоритма ЦЛП для ФНЧ с N = 20, 22, 32. Коэффициенты содержат не более двух ненулевых бит. В зависимости от N значения максимальной ошибки ($\tilde{e}_{\infty}^{'}$ при A=1) удается уменьшить на 11...18 дБ по сравнению с полученными методом простого округления. Улучшению на 18 дБ соответствует N = 32.

В [51] продолжено исследование алгоритмов ЦЛП. Минимизации подлежит $\tilde{e}_{\infty}^{'}$ при A= 1. Обсуждаются варианты организации “ветвления” в используемом методе ветвей и границ. “Поиск в глубину” является предпочтительнее “равно стоимостного поиска” для синтеза ЦФ высоких порядков за приемлемое время.

Приводятся результаты для ряда ФНЧ. Число ненулевых бит в коэффициентах не превышает двух, а M$\leq$9. Значения N= 11, 13, 31. Выигрыш в максимальной ошибке $\tilde{e}_{\infty}$ по сравнению с простым округлением коэффициентов составляет 4....17 дБ (в зависимости от N).

Отмечается, что дискретная оптимизация особенно полезна, когда необходимо удовлетворить заданному плану допусков на АЧХ. Для ФНЧ, предназначенного для работы в канале с ИКМ, требования МККТТ в случае непрерывных коэффициентов удовлетворяются при N = 35. Использование ЦЛП приводит к решению с N = 36 при M = 7 и числе ненулевых бит в коэффициентах не белее двух. Метод простого округления не дает допустимых АЧХ при произвольно больших N.

Для всех вышерассмотренных ЦФ время счета на ЭВМ CDC 6400 колеблется от нескольких секунд до нескольких сотен секунд.

Затрагивается проблема синтеза каскадных ЦФ. Оптимальный синтез таких структур является нелинейной задачей, требующей значительных вычислительных ресурсов. В связи с этим предлагается субоптимальный подход, требующий умеренных ресурсов. Полагается, что ЦФ состоит из двух каскадно соединенных субфильтров прямой формы с числом отводов N_1 и N_2. Начальные значения устанавливаются равными

$$N_1 = N_2 \approx 2N_{\min}/3,$$

где $N_{\min}$ соответствует проектированию ЦФ прямой формы с непрерывными коэффициентами, удовлетворяющему заданным требованиям.

Сначала синтезируется первый ЦФ, оптимальный в минимаксном смысле, затем второй ЦФ, так чтобы результирующая АЧХ была оптимальна. Далее реоптимизируется первый, второй ЦФ, опять первый и т. д. Этот процесс может быть прерван разработчиком в любой момент времени. Алгоритм повторяется для нескольких наборов N_1, N_2 и выбирается наилучший вариант. Для вышерассмотренного ФНЧ с требованиями МККТТ получено решение лишь с одним ненулевым битом в коэффициентах при N_1=24, N_2=22 и М = 6.

Продолжению изучения возможностей каскадного синтеза ЦФ с применением ЦЛП посвящена работа [82]. В случае ЦФ прямой формы с коэффициентами, содержащими не более двух ненулевых бит, максимальную ошибку трудно уменьшить, просто увеличивая N и применяя алгоритм ЦЛП. Это связано с тем, что имеет место насыщением. Каскадирование дает возможность, во-первых, существенно улучшить решения, соответствующие прямой форме ЦФ, и, во-вторых, устранить насыщение.

Исследуются два варианта каскадного синтеза. Первый-метод “прослаивающихся” нулей и второй - прямой метод, ранее предложенный в [51] и поясненный выше. Суть каждого из методов - поочередная дискретная оптимизация коэффициентов каждого из двух субфильтров. Отличие первого метода заключается в ином выборе передаточных функций субфильтров. Предлагается сначала синтезировать передаточную функцию ЦФ прямой формы, упорядочить ее нули в порядке увеличения их фазовых углов на z-плоскости и затем к первому субфильтру отнести нули с нечетными, а ко второму - с четными номерами или наоборот. Далее выполняется процесс уже поясненной дискретной оптимизации.

По отношению ко второму методу такой подход позволяет получить меньшие значения максимальной ошибки и, кроме того, устранить насыщение ошибки с увеличением N. Однако формы АЧХ субфильтров в полосе пропускания оказываются в этом случае далекими от плоских, что не наблюдается при использовании второго метода.

Все результаты, подтверждающие эффективность каскадного синтеза, получены для ФНЧ с одним набором частот при М = 10 и разных N. В работе не обсуждается вопрос о выборе N_1 и N_2 для субфильтров. По-видимому, они идентичны. Значение N для ЦФ прямой формы и результирующее значение N для каскадной структуры равны.

При двух ненулевых битах в коэффициентах, в зависимости от N=41,43,..,53, первый метод дает относительные уровни пульсаций примерно на 7,5...,15 дБ, а .второй на 0...6 дБ меньше, чем получаемые для ЦФ прямой формы.

Для каскадного ЦФ с N=53 при увеличении М от 4 до 10 наблюдается уменьшение относительного уровня пульсаций от значения -39 дБ до -60 дБ, причем начиная с М = 8 имеет место насыщение.

При одном ненулевом бите в коэффициентах, в зависимости от N=21,23,........ ,31, первый метод позволяет уменьшить относительные уровни пульсаций, получаемые для ЦФ прямой формы, на 7... 20дБ.

В [90] продолжено изучение проблемы получения минимаксного решения в смысле минимума $\widetilde{e}_\infty$, начатое в [32]). Исследованы два подхода, основанные на многократном применении алгоритма ЦЛП. Минимизируется ошибка $\widetilde{e}_\infty^{'}$ или $\widetilde{e}_\infty^{''}$ (см. (3) и (9)). Усиление A в соотношениях для ошибок наряду с искомыми коэффициентами C_i^* подлежит вариации. Коэффициенты полагаются содержащими два ненулевых бита, а A изменяется непрерывно в заданном диапазоне. Верхняя граница этого диапазона определяется исходя из предотвращения переполнений (ограничивается L_p-норма, в частности L_2), а нижняя граница равняется половине от верхней.

В первом подходе (метод секционирования A) минимизируется $\widetilde{e}_\infty^{'}$, причем это делается для целого ряда участков, на которые разбит весь диапазон изменения A. За оптимальное решение принимается то, для которого $\widetilde{e}_\infty$ минимально. Эффективность этого метода может быть улучшена путем предложенной в работе техники исключения, позволяющей на основе простого вычисления нижней границы на $\widetilde{e}_\infty$ не проводить минимизацию на некоторых участках.

Метод секционирования не гарантирует нахождение минимума $\widetilde{e}_\infty$, поэтому был предложен второй подход, в котором минимизируется $\widetilde{e}_\infty^{''}$. Решение этой задачи связано с проблемой удачного выбора параметра α (см. (9)). Предлагается выбирать a рекуррентно, начиная с $\alpha = \widetilde{e}_\infty$ для решения, соответствующего округленным коэффициентам. Если после применения ЦЛП $\alpha_2 = \widetilde{e}_\infty$ оказывается равным α, то оптимальное решение с минимумом $\widetilde{e}_\infty$ считается найденным, иначе α полагается равным α_2 и вновь выполняется ЦЛП. В работе сформулирована и доказана лемма, подтверждающая сходимость этого процесса. Обсуждается проблема альтернативного выбора начального значения α, позволяющего ускорить процесс получения решения, но окончательных рекомендаций пока не выработано.

Эффективность предложенных методов иллюстрируется на примере ФНЧ с N=35 и отношением уровней пульсаций в полосе пропускания и задерживания, равным 1/3. После минимизации (3) при A = const = 1 уровень пульсаций в полосе пропускания $\widetilde{\delta}_1 = \widetilde{\delta}_1 / \widetilde{A}$ =0,007501. Этому решению соответствует $\Delta\widetilde{a} = 0{,}13$ дБ и $\widetilde{a}_0 \geq 33$ дБ. Если A допускается к вариации ($0{,}7 \leq A \leq 1{,}4$) вместе с коэффициентами и используется метод секционирования A при числе участков, равном 14, то после применения алгоритма ЦЛП $\widetilde{\delta}_1$ = 0,003906, а $\widetilde{\delta}_1 / \widetilde{A}$=0,003077. Этому решению соответствует $\Delta\widetilde{a} = 0{,}054$ дБ и $\widetilde{a}_0 \geq 40{,}7$ дБ. Аналогичный результат получен и при использовании второго подхода.

Таким образом, благодаря применению предложенных методов можно значительно улучшить параметры АЧХ.

Метод ЦКП. Алгоритм ЦКП, кратко описанный ранее, применим и для поиска коэффициентов, содержащих ограниченное число ненулевых бит. Более того, в этом случае выигрыш от применения этого алгоритма вместо метода простого округления оказывается более значительным [43, 53].

При введении упомянутого ограничения необходимо модифицировать определение относительной коэффициентной чувствительности с целью учета неравномерного представления чисел [53]. Напомним, что знание этой чувствительности необходимо для установления приоритетности фиксации коэффициентов на дискретных значениях в процессе “ветвления”.

В [42, 43, 51, 53] проведены, в частности, исследования ряда ПФ с N = 35,45,....,95, синтезированных с помощью ЦКП и метода простого округления. Минимизируется среднеквадратическая ошибка J, определяемая (8). Граничные частоты, используемые в [42, 51, 53], несколько отличатся от принятых в [43]. Значение M$\leq$10 [43] и M$\leq$14 в [42, 51, 53]. Число ненулевых бит в коэффициентах принято равным не более двух в [43, 51] и не более трех в [42, 53]. Значение J благодаря оптимизации удается существенно уменьшить по отношению к значениям, найденным методом простого округления. Максимальное уменьшение J, примерно в 100 раз, получено для N=95 [42, 43, 51, 53].

На практике очень важно знать, как много или мало можно выиграть, выполняя дискретную оптимизацию вместо простого округления коэффициентов. В [43] предложен подход, позволяющий выполнить такую оценку в случае применения критерия наименьших квадратов. Используется конечный набор частот. Выражение для J записывается в матричной форме. Показано, что информация о степени улучшения решения заключена в собственных значениях и собственных векторах определенных матриц. В частности, при W() = 1 можно установить, что дискретным оптимумом является решение, найденное методом простого округления, т. е. в этом случае оптимизация бесполезна.

В [53] проводятся дополнительные исследования алгоритма ЦКП. При этом синтезируются ЦФ, оптимальные в минимаксном и среднеквадратическом смысле.

Для ФНЧ (при M= 10), коэффициенты которого содержат два ненулевых бита, алгоритм ЦКП позволяет найти допустимое решение при N = 37 за 10 с на IBM 3033. В то же время алгоритм ЦЛП приводит к допустимому решению с N = 36 за 180 с.

Представлены зависимости J от N = 35, 45,...,95 для случая ПФ с непрерывными и дискретными коэффициентами, содержащими (при M = 13) один, два и три ненулевых бита. С увеличением числа таких бит зависимость приближается к полученной для непрерывных коэффициентов. Приведены также результаты исследования влияния M на J для ПФ с N = 45. С увеличением M значения J уменьшаются, но, начиная с M = 9, происходит насыщение.

Все эти результаты получены для случая фиксации коэффициентов на L=6 дискретных значениях. Исследование влияния L на время счета и J проводится для ПФ с N=65. Время растет пропорционально увеличению L. При этом J уменьшается. Рекомендуется из компромиссных соображений выбирать L=4.

В отличие от [43] в [53] обнаружено, что с увеличением N значение J не всегда уменьшается. Это обусловлено субоптимальностью предложенного алгоритма ЦКП. Наиболее часто эти случаи имеют место при больших N. Алгоритм предлагается использовать при $N \leq 90$.

Методы ветвей и границ. В [14] поиск решения, соответствующего приемлемой среднеквадратической ошибки и минимуму F в (6), предлагается проводить методом ветвей и границ в пределах области, ограниченной эллипсоидом. Эта работа уже упоминалась в разделе настоящего обзора, посвященного проектированию БИХ-фильтров.

В качестве примера приводятся результаты синтеза ПФ, используемого при передаче данных по телефонному каналу. Ширина полосы 1,6 кГц, частота дискретизации 9,6 кГц. При N = 30 получено $e_2^{'\,2} = 5{,}6 \times 10^{-3}$ и F = 42. Представлены найденные коэффициенты и дан график соответствующей АЧХ.

Метод ветвей и границ в сочетании с алгоритмом Ремеза, упоминавшимся выше, может быть использован и в случае дополнительного ограничения на вид представления коэффициентов [60]. Минимизируется $\tilde{e}_\infty^{'}$ при A=1. Приводятся результаты для ФНЧ с N = 15, M = 4 и коэффициентами, равными степени числа два. Найденному решению соответствует $\tilde{e}_\infty^{'}$=0,25. Простое округление коэффициентов до значений, равных степени два, дает $\tilde{e}_\infty^{'}$=0,375. Оптимальному решению без ограничения на число бит в дискретных коэффициентах соответствует $\tilde{e}_\infty^{'}$ = 0,2444 [39].

0 - 1 программирование. Для синтеза ЦФ с минимальным суммарным числом ненулевых бит в представлении коэффициентов может быть применен подход, основанный на технике решения псевдобулевых неравенств [27]. Это оказывается возможным благодаря тому, что такой алгоритм приводит к ряду приемлемых решений, из которых выбирается вариант, соответствующий минимуму F в (6).

Синтез ЦФ с коэффициентами вида степени два может быть выполнен с помощью пакетов программных средств 0-1 целочисленного линейного программирования. При этом стандартная формулировка задачи должна быть уточнена путем добавления соответствующих ограничений на вид коэффициентов [37].

Работы [27, 37] упоминались выше. Конкретных результатов по обсуждаемой здесь проблеме в этих статьях не приводится.

Локальный поиск. Алгоритм ЦЛП [51] гарантирует получение глобального оптимума в минимаксном смысле (т. е. минимума $\tilde{e}_\infty^{'}$), но требует большого времени счета. Это ограничивает его применение синтезом ЦФ с $N \leq 40$. Алгоритм, основанный на использовании критерия наименьших квадратов [53], дает хорошие решения и с его помощью могут быть синтезированы ЦФ с N = 90. Однако аппроксимация критерием наименьших квадратов требует проведения предварительного подбора весовой функции и не гарантирует получение АЧХ, оптимальных в минимаксном смысле. Поэтому в [78] предлагается другой субоптимальный алгоритм, позволяющий синтезировать ЦФ с N>200.

Вначале выполняется расчет ЦФ с использованием алгоритма Ремеза, что приводит к решению с непрерывными коэффициентами C_i. Затем осуществляется минимизация функции вида

$$G(A) = \sum_{i=1}^{\frac{N-1}{2}} (C_i - C_i^* / A)^2, \qquad (10)$$

где $C_i^* = [AC_i]$, символ [x] означает округление x до значения $\pm 2^{-n} \pm 2^{-m}$, n и m - целые числа менее 12.

Параметр A варьируется в диапазоне 0,5…1,сначала с шагом 0,01, а затем с шагом 0,001 для уточнения оптимума $G(A)$.

Далее используются идеи неявного перебора и локального поиска для нахождения минимаксного решения. Предполагается, что каждый коэффициент может принимать 5 примыкающих значений, включая найденное на этапе минимизации $G(A)$. Для каждой группы из четырех коэффициентов выполняется перебор возможных комбинаций, всего $5^4 = 625$ вариантов. Значение коэффициента с наименьшим индексом, соответствующее минимуму $\tilde{e}_\infty$, фиксируется. Формируется новая группа из трех найденных и следующего по порядку коэффициентов. Снова производится перебор возможных вариантов. После (N-1)/2-2 таких циклов найденные коэффициенты используются в качестве исходных и все повторяется до тех пор, пока наблюдается улучшение в $\tilde{e}_\infty$.

Если полученное решение не удовлетворяет требованиям, то N увеличивается и все повторяется. Однако, если $N > N_{\max} = 59$, то осуществляется переход к синтезу ЦФ на основе структур с идентичными субфильтрами [106]. Это обусловлено тем, что по мере роста N максимальная ошибка стремится к насыщению. Применяются две структуры, которым соответствуют

$$H(z) = H_c^2(z)(3 - 2H_c(z)) \text{ и } \quad H(z) = H_c(z)(10 - 15H_c(z) + 6H_c(z)).$$

Вышеописанный алгоритм применяется для синтеза $H_c(z)$. Требования к АЧХ субфильтра легко пересчитываются из исходных требований.

На многочисленных примерах иллюстрируется эффективность предложенной процедуры. Приводятся графики зависимостей максимальной ошибки от N для ЦФ (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ), синтезированных как с помощью предложенной процедуры, так и с помощью алгоритма Ремеза для случаев непрерывных и округленных коэффициентов, содержащих только два ненулевых бита. Кроме того, приведена аналогичная зависимость для ФНЧ, синтезированных посредством алгоритма ЦЛП [51].

Максимальные ошибки, полученные с помощью предложенного алгоритма, отличаются от представленных в [51] не более чем на 2,5% (или 2,5 дБ). По сравнению с результатами, полученными методом простого округления, наблюдается выигрыш вплоть до 19 дБ.

Приводится также пример синтеза одного ФНЧ, составленного из субфильтров согласно второму из вышеприведенных выражений для H(z). Получена максимальная ошибка не более -80 дБ. Для субфильтра N_c=57 и общее значение $N = 57 \times 5 = 285$.

В [86] предлагается другая двухэтапная стратегия, включающая процедуру определения масштабного коэффициента A и локальный поиск.

Представление коэффициентов с ограниченным числом ненулевых бит дает очень неравномерное их распределение на шкале чисел, эквивалентное квантованию с неравномерным шагом.

Даже при $M \to \infty$ такое распределение сохраняется. Если коэффициенты нормированы и не превышают значения 1, то диапазону 1/2...1 свойственны большие ошибки представления. Поэтому для коэффициентов со значениями 0...1/2 предлагается использовать r ненулевых бит, а со значениями 1/2...1 на один бит больше. Импульсная характеристика ФНЧ близка к sin (x)/x и поэтому только некоторые коэффициенты будут >1/2.

Значение r предлагается выбирать исходя из условия один ненулевой бит на 20 дБ ослабления АЧХ в полосе задерживания. Так, например, для ослабления АЧХ в этой полосе 60 дБ потребуется r =3.

Как показывают эксперименты, выбор M = 8...15 вполне удовлетворяет типичным требованиям к АЧХ.

Для конечного числа значений A из диапазона 1/2...1 отмасштабированные коэффициенты округляются согласно предварительно составленной таблице КЗРК с определенным числом ненулевых бит. Набор коэффициентов, приводящий к минимуму $\tilde{e}_\infty$, используется в качестве исходного на втором этапе предлагаемой процедуры. Такой критерий выбора A требует больших временных затрат, чем критерий из [78], однако он дает лучшие результаты. Указано на возможность сочетания этих двух критериев.

Установлено, что применение двухпараметрической стратегии локального поиска, использованной в [39] для синтеза ЦФ без ограничения на число ненулевых бит, эффективнее однопараметрической. Каждый коэффициент может принимать два значения, примыкающих к исходному. Определяется набор коэффициентов, соответствующий минимуму $\tilde{e}_\infty$, и двухпараметрический поиск повторяется с этими коэффициентами в качестве исходных. Это продолжается до тех пор, пока не перестанет улучшаться ошибка $\tilde{e}_\infty$.

Для ФНЧ с N = 25, M = 8, r = 2 получена АЧХ с ослаблением в полосе задерживания 43,8 дБ. При этом только три коэффициента содержат три ненулевых бита. В случае непрерывных коэффициентов ослабление равно 46,0 дБ. В [51] для этого же ЦФ получено 41 дБ, а в [78] - 38 дБ.

Для другого ФНЧ с N = 60, M = 13 найдено решение с тремя коэффициентами, содержащими 4 ненулевых бита. При этом остальные коэффициенты содержат не более трех таких бит. Полученное ослабление в полосе задерживания (60,5 дБ) только на 1,2 дБ меньше значения, соответствующего непрерывным коэффициентам. Общая сложность этого ЦФ составляет 59 регистров и 116 сумматоров.

В [91] предложен простой однопараметрический алгоритм. Исходное решение находится обычным путем, например, с помощью алгоритма Ремеза. Процедура начинается с оценки чувствительностей

$$S_i = \{[H'_{\max}(f) - H'_{\min}(f)] - [H_{\max}(f) - H_{\min}(f)]\} \text{ (в полосе пропускания)}$$

$$+ \{[H'_{\max}(f) - H_{\min}(f)]\} \text{ (в полосе задерживания)},$$

где $H(f)$ -АЧХ, соответствующая непрерывным коэффициентам, и $H'(f)$-АЧХ, соответствующая округлению 1-го коэффициента до числа, равного степени два.

Затем все коэффициенты округляются до чисел, равных степени два. Коэффициент, соответствующий наибольшему значению S_i устанавливается равным ближайшему числу, содержащему два ненулевых бита. Если требуемые допуски удовлетворяются, то решение найдено, иначе изменяется следующий коэффициент, и так до полного перечисления всех коэффициентов в порядке уменьшения S_i. Если коэффициенты исчерпаны, а решение не обнаружено, то увеличивается N либо число ненулевых бит (в том числе и при оценке S_i) и вся процедура повторяется.

Эффективность алгоритма иллюстрируется на двух примерах. Для ФНЧ с N = 22 получено решение с 14 коэффициентами, содержащими один, и с 8 коэффициентами, содержащими два ненулевых бита, что требует всего 30 умножений на степень числа два. Применение алгоритма [86] приводит к 38 умножениям. Для другого ФНЧ, все коэффициенты которого содержат два ненулевых бита, допустимое решение найдено для N = 90. Применение алгоритма [86] приводит к решению с N=110. Отмечается, что рассматривались также другие примеры, и во всех случаях предлагаемый алгоритм давал лучшие результаты, чем некоторые известные процедуры.

Имитация процесса отжига. Алгоритмы на основе метода имитации отжига используются как для получения решений с минимальным числом ненулевых бит в коэффициентах [81], так и в случае ограничения таких бит в каждом коэффициенте [88, 92].

Для ЦФ с N=20 (10 коэффициентов) в [81] получено решение с F =10. Время счета на VAX 8600/VMS составляет 15 мин. При этом в алгоритме выполнено 45 тысяч итераций.

Более широкомасштабные исследования алгоритма имитации отжига выполнены в [92]. Предлагаемая процедура основывается на модифицированной версии известного алгоритма имитации отжига для непрерывных переменных и направлена на получение решения с коэффициентами, содержащими два ненулевых бита. Переменными является непрерывный коэффициент A и дискретные коэффициенты C_i^*.

Выбор A осуществляется исходя из условия

$$\min_A G(A) = \max_A \min_i \left| \; C_i - C_i^* / A \; \right|.$$

Здесь C_i^* определяется также, как и для (10). Путем изменения A от 0,5 до 1 с шагом 0,001 определяется $G(A)$. Запоминается A_1, соответствующее $\min G(A)$ и K других локальных минимумов, для которых $G(A_k) \le 5G(A_1)$, $(1 \le k \le K+1)$. Для каждого A используется алгоритм имитации отжига. Предполагается, что A может изменяться в интервале от $A_k - 0{,}15$ до $A_k + 0{,}15$. Если лучшее решение не удовлетворяет требованиям, то N увеличивается.

Достаточно детально описывается алгоритм имитации отжига. Особое внимание уделяется выбору режимов отжига. Отмечается, что задание начального вектора коэффициентов может быть выполнено случайным образом. Однако гораздо лучшие характеристики алгоритма получаются, когда используется хорошее начальное приближение, например, соответствующее округленным коэффициентам оптимального непрерывного решения. На каждой итерации алгоритма изменяется только один коэффициент, что позволяет экономить количество необходимых вычислений, апробирование алгоритма проводится для многих ЦФ с нечетными N при M = 9.

Результаты синтеза ФНЧ с N = 27...41 и числом ненулевых бит в коэффициентах, равным двум, практически совпадают с полученными в [51, 78], а в некоторых случаях превосходят результаты [78]. Количество оценок целевой функции в зависимости от N равно 795...1168 тысяч. Для синтеза ЦФ с N=27 требуется около часа работы ЭВМ SUN 3/60. С увеличением N время счета растет.

Кроме упомянутых ЦФ, рассматриваются ФНЧ Найквиста с N=27, 31 и 35, предназначенные для модемов. Такие ЦФ минимизируют уровень межсимвольной интерференции в каналах передачи данных и должны обладать достаточно хорошими АЧХ и импульсными характеристиками. В связи с этим целевая функция, подлежащая минимизации, модифицируется с тем, чтобы нести информацию о качестве АЧХ в полосе задерживания и максимальном уровне интерференции. Благодаря предложенной оптимизации значения этой функции, соответствующие округленным коэффициентам, удается уменьшить на 13,7…21,3 дБ (в зависимости от N). Для ЦФ с N=31 при увеличении уровня межсимвольной интерференции на 5% величина пульсаций в полосе задерживания уменьшается более чем на 12 дБ.

Результаты для ряда ФНЧ с N = 21...31 и коэффициентами, равными степени два, сравниваются с приведенными в [82]. В случае ЦФ прямой формы существенного улучшения АЧХ получить не удается. Для каскадной реализации ЦФ (два каскада, передаточные функции которых имеют порядки

N1 и N2:N=21 заменяется на N1=N2=11;N = 23 - на N1 = 13 и N2 = 11;N = 31 - на N1 = 17 и N2= 15 и т. п.) предлагаемый алгоритм дает уменьшение максимальных ошибок, но не более чем на 3,5 дБ.

Отмечается, что алгоритм не гарантирует получения глобального оптимума и для большей уверенности в оптимальности найденного решения его необходимо применять неоднократно, главный недостаток - это большое время счета. Авторы [92] заканчивают свое изложение с некоторым сомнением, так, по крайней мере, кажется, относительно получения хороших решений с помощью предлагаемого алгоритма для ЦФ повышенной сложности (с N>39) за приемлемое время.

Выводы

Проведенный анализ публикаций, посвященных проблеме синтеза передаточных функций одномерных ЦФ в области дискретных значений коэффициентов, показывает, что интерес представляют задачи оптимизации АЧХ, минимизации длины слова коэффициентов, представленных в двоичных кодах с фиксированной запятой, и уменьшения числа ненулевых бит в канонических знакоразрядных кодах коэффициентов. Кроме того, сделаны некоторые шаги в изучении проблем оптимизации временных характеристик ЦФ и минимизации уровня шума округления.

Как правило, при решении задач оптимизации характеристик используется минимаксный критерий или критерий наименьших квадратов. Часто для ускорения ведется поиск лишь допустимого решения, а не наилучшего. Простое округление коэффициентов, соответствующих непрерывному решению, приводит к неоптимальным результатам, а метод полного перебора коэффициентов на дискретном множестве значений непригоден из-за чрезмерных затрат машинного времени. Поэтому были предприняты большие усилия по разработке алгоритмов дискретного (целочисленного) программирования, приводящих к решениям, близким к оптимальным за приемлемое время.

Исследован ряд алгоритмов, основанных на методах прямого, случайного и локального поиска, неявного перебора, ветвей и границ, дискретно-непрерывной оптимизации, целочисленного линейного и квадратичного программирования, вариации исходных параметров и имитации процесса отжига. Продемонстрировано, что учет особенностей задач фильтрации позволяет значительно увеличить скорость сходимости общецелевых алгоритмов, улучшить качество получаемых решений.

Многие из предложенных алгоритмов приводят к близким результатам, но сложность программирования и вычислительные затраты, связанные с их применением, существенно отличаются. Трудности сопоставления проведенных исследований обусловлены тем, что некоторые авторы не приводят достаточно полных характеристик своих алгоритмов и часто рассматривают собственные тестовые примеры. Одни авторы полагают, что необходимо беречь время, отводимое на программирование, другие считают более важным сокращение времени счета. В ряде публикаций указано количество необходимых оценок целевой функции, в других временные затраты при использовании определенной ЭВМ.

На конкретных примерах каскадных, волновых, параллельных и прямых структур ЦФ показано, что благодаря применению алгоритмов дискретного программирования длину слова коэффициентов можно уменьшить вдвое, ошибки аппроксимации АЧХ - в десятки раз, суммарное число ненулевых бит в представлении коэффициентов - в несколько раз, приемлемые АЧХ можно получить с коэффициентами, содержащими всего один ненулевой бит (это приводит к структурам ЦФ без умножителей и с минимальным числом сумматоров). Кроме того, на этапе поиска дискретных коэффициентов можно до некоторой степени контролировать уровень шума округления и амплитуды малых предельных циклов.

В зависимости от применяемых ЭВМ, алгоритмов и требований к характеристикам ЦФ время счета может изменяться от нескольких десятков секунд до 10^{15} с (1 год $\approx 3\ 10^7$ с). Верхний предел был оценен для синтеза КИХ-фильтра с длиной импульсной характеристики N= 120 на ЭВМ IBM 3033 с помощью общецелевого алгоритма целочисленного линейного программирования. При использовании более современной ЭВМ с быстродействием 667 мегафлоп/с синтез КИХ-фильтров с N = 80 с применением того же самого алгоритма занимает в среднем 10 ч.

Всем алгоритмам свойственны определенные преимущества и недостатки. Тем не менее применительно к БИХ-фильтрам можно выделить алгоритмы на основе дискретно-непрерывной оптимизации и вариации исходных параметров, как характеризующиеся хорошим качеством решений при относительно малом числе оценок целевой функции. Первые можно рекомендовать в случае произвольных, а вторые - в случае стандартных требований к характеристикам ЦФ. Применительно к КИХ-фильтрам следует отметить алгоритмы целочисленного линейного и квадратичного программирования, ветвей и границ в сочетании с алгоритмом Ремеза и алгоритмы локального поиска. Как для БИХ-, так и для КИХ-фильтров перспективными являются алгоритмы на основе имитации процесса отжига, которые открывают новые возможности получения оптимальных решений в случае одновременного задания многих требований к ЦФ (многокритериальные задачи).

Более чем за 20 лет накоплен достаточно богатый опыт в решении задач синтеза передаточных функций в области дискретных значений коэффициентов. Однако многие трудности предстоит еще преодолеть.

Так, проблема синтеза КИХ-фильтров высоких порядков требует дополнительных исследований в плане сокращения времени счета. Весьма актуальна задача получения хороших начальных приближений для этих ЦФ. Сделаны лишь первые шаги в изучении проблемы синтеза каскадных КИХ-фильтров. Не уделено должного внимания минимизации суммарного числа ненулевых бит коэффициентов КИХ-фильтров. Требуется дальнейшее исследование проблемы минимизации относительной максимальной ошибки аппроксимации АЧХ. Применительно к БИХ-фильтрам следует уделить внимание проблеме одновременной оптимизации АЧХ и ГВП, АЧХ и временных характеристик (импульсных или переходных). Для каскадных ЦФ важным моментом является учет в алгоритме дискретной оптимизации процедур масштабирования, упорядочения звеньев и формирования полюсно-нулевых пар звеньев. Этой задаче в публикациях не уделено достаточного внимания.

Нерешенной по-прежнему остается проблема одновременного синтеза передаточной функции и структуры ЦФ с учетом эффектов конечной разрядности. Наконец, актуальной является задача создания “сквозных” САПР СБИС ЦФ (от задания исходных требований к характеристикам ЦФ до получения топологии СБИС).

В заключение отметим, что появление высокоточных сигнальных процессоров несколько поубавило интерес к обсуждаемой здесь проблеме. Пик числа публикаций приходится на конец 1970-начало 1980 гг. *Действительно, реализацию ЦФ оказалось выгоднее с точки зрения экономии временных и материальных затрат выполнять на сигнальных процессорах. Однако такой реализации свойственно ограниченное быстродействие. По этой причине во многих применениях использование сигнальных процессоров может оказаться нереальным. В этом случае альтернативной элементной базой ЦФ являются ПЛИС и заказные СБИС. Характеристики таких ЦФ можно значительно улучшить благодаря применению рассмотренных в данном обзоре алгоритмов.*

Автор благодарит Блинову В.В. за организацию копирования многих статей, а также Зорича А.А. за помощь в освоении работы с компьютером IBM-PC, на котором была подготовлена рукопись данного обзора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Avenhaus E., Schussler W. On the approximation problem in the design of digital filters with limited wordlength//AEU- 1970.- B. 24, № 12.- S. 571-572.
2. Schussler W. On the approximation problem in the design of digital filters//Proc. of the 5th Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems//- 1971.-P.54-63.
3. Steiglitz K. Design short-word recursive digital filters//Proc. of the 9th Annual Alerton Conference on CAS Theory.- 1971.-P. 778-788.
4. Suk M., Mitra S.K. Computer-aided design of digital filters with finite wordlengths//IEEE Trans.- 1972.- AU-20.- № 5. -P. 356-363.
5. Storcbach W. H. On the design of recursive digital filters with minimum coefficient wordlength//IEEE ISCT.- 1972. -P. 279-282.

6. Эвенхауз. Синтез цифровых фильтров с ограниченной длиной слова коэффициентов.//Зарубежная радиоэлектроника. –1973.- № 8.- С. 110-122.
7. Boite R., Dules H., Leich H. Optimization on digital filters in the discrete space of coefficients//Electron. Lett. – 1974.- Vol. 10, № 10.-P. 179-180.
8. Charalambous C., Best M. J. Optimization of recursive digital filters with finite word lengths//IEEE Trans.- 1974.- Vol. ASSP-22, № 6.- P. 424-431.
9. Bandler J. W., Bardakjian B. L., Chen J. H. K. Design of recursive digital filters with optimized word length coefficients//Proc. of 8th Annual Princeton Conference on Information Sciences and Systems, 1974.
10. Bandler J. W., Bardakjian B. L., Chen J. H. K. Design of recursive digital filters with optimized word length coefficients//CAD.-1975. Vol. 7, № 3.-P. 151-156.
11. Crochiere R. E. A new statistical approach to the coefficient word length problem for digital filters//IEEE Trans.- 1975.-Vol. CAS-22, № 3.-P. 190-196.
12. Dehner G. On the design Cauer filters with coefficients of limited wordlength//AEU.- 1975.- B. 26, № 4. S. 165-168.
13. Dubois H. An algoritm for recursive digital filter approximation with quantized coefficients//Proc. of the Florence Conference on Digital Signal Processing.- 1975.
14. Chambon P., Desblache A. Integer coefficients optimization of digital filters//Proc. IEEE. ISCAS.-1976.-P. 461-464.
15. Hadjifotiou A., Appleby D. G. Design of digital filters with severely quantized coefficients//The Radio and Electronic Engineer. –1976.-Vol. 46, № 1.- P. 23-28.
16. Kodek D., Krkic S. Synthesis of optimal quantized nonrecursive digital filters//Proc. of Informatica Int. Symp. – 1976. – P.3.119.
17. Wegener W. Design of wave digital filters with very short coefficient word lengths//Proc. IEEE ISCAS.-1976.-P. 473-476.
18. Grenez F. Design of F.I.R. linear phase digital filters to minimise the statistical word length of the coefficients//IEEE J. Electron. Circuits & Syst. – 1977. № 1.-P. 181-185.
19. Duhamel P. An algorithm for the design of digital filters with finite wordlength coefficients//Proc. IEEE ICASSP.-1977.-P. 611-614.
20. Brglez F. Digital filter design with coefficients of reduced wordlength//Proc. 1977 IEEE ISCAS.- 1977.-P. 52-55.
21. Stepan M. An algorithm for the synthesis of optimal finite word length digital filters//MSE. –1977.
22. Ланнэ А. А., Шевкопляс Г. Б. Использование методов оптимального (рационального) конструирования передаточных функций для повышения точности характеристик цифровых фильтров//Теоретическая электротехника. - 1978.- № 24. -С. 3-17.
23. Brglez F. Digital filter design with short word-length coefficients//IEEE Trans.-1978.-Vol. CAS-25, № 12. - P. 1044-1050.
24. Wegener W. On the design of wave digital lattice filters with short coefficient word lengths and optimal dynamic range//IEEE Trans.- 1978.-Vol. CAS-25, № 12.- P. 1091-1098.
25. Grenez F. Reduction of coefficient for FIR linear phase digital filters//ECCTD.- 1978.- Vol.1.- P. 330-334 .
26. Smit N. A random-search method for designing finite-wordlength recursive digital filters//IEEE Trans.-1979.- Vol. ASSP-27, № 1.- P. 40-46.
27. Patney R.K. Dutta Roy S.C. Design of linear-phase FIR filters using pseodo-boolean methods//IEEE Trans. – 1979. -Vol. CAS-26, № 4. –P. 255-260.
28. Lim Y.C., Constantinides A. G. Linear phase FIR digital filter without multipliers//Proc. IEEE ISCAS.-1979.-P. 188.
29. Grenez F. Design of F.I.R. direct form digital filters with two quantisation steps//Electron. Lett.-1979.-Vol. 15, №4.-P. 124-125.
30. Kwan H.-K. On the problem of designing IIR digital filters with short coefficient word lengths//IEEE Trans.- 1979.–Vol. ASSP-27, № 6- P. 620-624.
31. Kwan H.-K. Method for designing recursive digital filters with short wordlengths//Electron. Lett.- 1979. Vol. 15, № 4. - P. 128-130.
32. Lim Y.-C., Constantinides A. G. New integer programming scheme for nonrecursive digital filter design//Electron. Lett. – 1979.- Vol. 15, № 25.- P. 812-813.
33. Stepan M. New algorithm for optimal quantised linear phase FIR filter design//EUSIPCO-80.-Short Commun.- 1980.-P. 39-40.

34. Kodek D. Design of optimal finite wordlength FIR digital filters using integer programming techniques//IEEE Trans. –1980.-Vol. ASSP-28, №3.- P. 304-308.
35. Kodek D. An algorithm for the design of optimal finite word-length FIR digital filters//ICASSP.- 1980.- P.73-76.
36. Kodek D. M., Steiglitz K. Filter-length word-length tradeoffs in FIR digital filter design//IEEE Trans.- 1980.- Vol. ASSP-28, № 6.- P. 739-744.
37. Lawrence V. B., Salazar A. C. Finite precision of linear phase FIR filters//Bell Syst. Tech. J.-1980.- Vol. 59, № 9.- P. 1575-1598.
38. Жуков С. Г. Синтез рекурсивных цифровых фильтров с учетом конечной длины слова//Радиотехника// 1980. - Т. 35, № 4.- С. 60-63.
39. Kodek D. M., Steiglitz K. Comparison of optimal and local search method for designing finite wordlength FIR digital filters//IEEE Trans.-1981.-Vol. CAS-28, №1.- P. 28-32.
40. Bolton R., Craig P. C., Westphal L. C. Computer-aided design of recursive digital filters with coefficients having restricted minimal representation//IEEE Trans. –1981.-Vol ASSP-29, № 6. -P. 1205-1208.
41. Цифровые фильтры в электросвязи и радиотехнике/Под ред. Л.М. Гольденберга. - М.: Радио и связь, 1982.- 224 с.
42. Lim Y. C., Parker S. R. A discrete coefficient FIR digital filter design based upon an LMS criteria.- Proc. IEEE ISCAS.-1982.-pp. 796-799.
43. Lim Y. C., Parker S. R., Constantinides A. G. Finite word length FIR filter design using integer programming over a discrete coefficient space//IEEE Trans.-1982.-Vol. ASSP-30, № 4. -P. 661-664.
44. Ishii R. Digital filter design with finite word length coefficients//The Transactions of the Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan. –1982.- Vol. 65-A, № 1.- P. 85-92.
45. Nakayama K. A discrete optimization method for high-order FIR filters with finite wordlength coefficients//ICASSP.-1982.- Vol. 1.-P. 484-487.
46. Narraway J. J., Venkatesan R. Digital filter with fast coefficient implementations//Electron. Lett.-1982.- Vol. 18.- № 19.- P. 852-853.
47. Мингазин А. Т., Быстров А. Н., Сазонов А. А. Влияние порядка передаточной функции на разрядность коэффициентов передаточной функции и шум округления рекурсивного цифрового фильтра//Расчет и проектирование элементов и узлов микроэлектронных радиотехнических систем и цепей СВЧ.-М.: МИЭТ, 1982. - С. 24-31.
48. Charalambous C., Motamedi Z., Antoniou A. Two methods for the reduction of quantization effects in recursive digital filters//Proc. IEEE I SCAS.-1982.-P. 1049-1052.
49. Antoniou A., Charalambous C., Motamedi Z. Two methods for the reduction of quantization effects in recursive digital filters//IEEE Trans. –1983.-Vol. CAS-30, № 3.- P. 160-166.
50. Venkatesan R., Narraway J.J. Digital filter function with fast coefficient implementation: An addendum//Electron. Lett. – 1983. Vol. 19, № 3. P.84
51. Lim Y.-C., Parker S. R. FIR filter design over a discrete powers-of-two coefficient space//IEEE Trans.-1983.- Vol. ASSP-31, № 3.- P. 583-591.
52. Marques de Sa J. P. Anew design method of optimal finite word length linear phase FIR digital filters//IEEE Trans.-1983.- Vol. ASSP-31, № 4. -P. 1032-1034.
53. Lim Y. C., Parker S. R. Discrete coefficient FIR digital filter design based upon an LMS criteria//IEEE Trans.- 1983.- Vol. CAS-30, № 10.-P.723-739.
54. Gazsi L., Gulluoglu S. N. Discrete optimization of coefficients in CSD code//Proc. of IEEE Mediterranean electrotehn. conf.- 1983.- P. C03.08-C03.09.
55. Jain R., Vandewalle, De Man H. Discrete coefficient optimization for the CAD of arbitrary integrated digital filters//Proc. ECCTD.- 1983. P. 414-416.
56. Jing Z., Fam A. T. Design finite wordlength IIR filters by successive discretization and reoptimization//Proc. Int. Conf. on Electrical Circuits and Electronics.-1983.-P.516-519.
57. Мингазин А. Т. Метод синтеза цифровых фильтров с коэффициентами конечной разрядности//Электросвязь. - 1983. - № 7. С. 49-53.
58. Мингазин А. Т. Начальные приближения для синтеза цифровых фильтров с минимальной длиной слова коэффициентов//Электронная техника. Сер. 10, Микроэлектронные устройства.-1983. – Вып. 6. - С. 3-8.
59. Varoufakis S. J., Venetsanopoulos A. N. Fast optimum design of IIR digital filters with finite precision on coefficients//Int. J. of Elektron.-1984.-Vol. 57, № 2.-P.207-216.
60. Siohan P., Benslimane A. Design of optimal finite wordlength linear phase FIR filters: New applications//Proc. IEEE ICASSP. -1984.-P. 30.1.1-30.1.4.

61. Jain R., Vandewalle J., De Man H. Efficient CAD tools for the coefficient optimization of arbitrary integrated digital filters//Proc. IEEE ICASSP.-1984.-P. 30.11.1-30.11.4.
62. Мингазин А. Т. Минимизация разрядности коэффициентов и отношения шум/сигнал в рекурсивных цифровых фильтрах//Электронная техника. Сер. 10, Микроэлектронные устройства.-1984. – Вып. 6. - С. 32-38.
63. Discrete optimization using Gaussian adaptation and quadratic function minimization/K. Boestad, G. Kjellstrom, L. Taxen, P.O. Lindberg//Proc. of China Int. Conf. Circuits. Syst. - 1985. –P. 526 –529.
64. Жуков С. Г. Синтез цифровых фильтров с помощью ЭВМ//Проектирование радиоэлектронных и антенных устройств с применением ЭВМ.-М., 1985.- С. 34-36.
65. Мингазин А. Т. Номограмма для расчета цифровых фильтров Чебышева второго порядка//Радиотехника. - 1985. - № 3.- С. 83-85.
66. Бондаренко Н. Н., Митрофанова Т. С. Синтез передаточных функций рекурсивных цифровых фильтров с коэффициентами специального вида//Известия вузов СССР. Радиоэлектроника. -1985.-Т. 28, № 8.- Р. 90-92.
67. Брунченко А. В., Игнатьев А. А. Выбор квантования коэффициентов в цифровых фильтрах//Известия вузов СССР. Радиоэлектроника.-1985.- Т. 28, № 8.-Р. 92-94.
68. Narraway J. J., Venkatesan R. Digital filter functions with short coefficients//IEE Proc.-1986. Pt. G. Vol.133, № 1.- P. 30-34.
69. Jing Z., Fam A. T. A new scheme for designing IIR filters with finite wordlength coefficients//IEEE Trans.-1986.- Vol. ASSP-34, № 5. -P. 1335-1336.
70. Mirzai A. R., Lawson S.S. Finite wordlength design of wave digital filters//Electron. Lett.-1986. Vol. 22, № 16.- P. 851-853.
71. Diethorn E. J., Munson D. C. Finite word length FIR digital filter design using simulated annealing//Proc. IEEE ISCAS.-1986.-P. 217-220.
72. Мингазин А. Т. Разрядность коэффициентов рекурсивных цифровых фильтров при упрощенном методе синтеза//Радиотехника. - 1987.-№2. - С. 31-33.
73. Nakayama K. A discrete optimization method for high-order FIR filters with finite wordlength coefficients//IEEE Trans. –1987.- Vol. ASSP-35, №8.- P. 1215-1217.
74. Nakayama K. A discrete optimization method for high-order FIR filters with finite wordlength coefficients//Trans. Inst. Electron. Inform. and Commun. Eng. –1987. - Vol. E-70, № 8.- P.735-743.
75. Мингазин А. Т. Синтез рекурсивных цифровых фильтров при ограниченной разрядности коэффициентов//Электросвязь.-1987.- № 9.- С. 58-62.
76. Kjellstrom G., Taxen L., Lindberg P. O. Discrete optimization of digital filters using Gausian adaptation and quadratic function minimization//IEEE Trans.- 1987. - Vol. CAS-34, № 10. -P. 1238-1242.
77. Мингазин А. Т. Уменьшение разрядности коэффициентов цифровых фильтров введением кратности полюсов и нулей//Известия вузов СССР. Радиоэлектроника.-1987. -Т. 30, № 12.- С. 62-64.
78. Zhao Q., Tadokoro Y. A simple design of FIR filters with powers of-two coefficients//IEEE Trans.-1988. Vol. CAS-35, №5, -P. 566-570.
79. Jaumard B., Minoux M., Siohan P. Finite precision design of FIR filters using a convexity property//IEEE Trans. –1988.- Vol. ASSP-36, №3. -P. 407-411.
80. Varoufakis S. J., Venetsanopoulos A. N. On the evaluation of finite precision coefficients in IIR digital filter design//Int. J. of Electron.-1988.-Vol. 64, № 4.-P. 603-610.
81. Catthor F., De Man H., Vandewalle J. Simulated-annealing-based optimization of coefficient and data word lengths in digital filters//Inter. J. of Circuit Theory and Applications.-1988.- Vol. 16, № 4.-P. 371-390.
82. Lim Y. C., Liu B. Design of cascade form FIR filters with discrete value coefficients//IEEE Trans.-1988.- Vol. ASSP-36, № 11. - P. 1735-1739.
83. Gefforth L. Discrete optimization of wave digital filters combining simulated annealing and line search method//ECCTD. 1989. –P. 502 – 506.
84. Finite wordlength digital filter design using an annealing algorithm/N. Benvenuto, M. Marchesi, G. Orlandi et al. //Proc IEEE ICASSP.-1989, Vol. 2.- P. 861-866.
85. Benvenuto N., Marchesi M. Digital filters design by simulated annealing//IEEE Trans.- 1989.- Vol. CAS-36, № 3.- P. 459-460.
86. Samueli H. An improved search algorithm for the design of multiplierless FIR filters with powers-of-two coefficients//IEEE Trans.- 1989.- Vol. CAS-36, №.- P. 1044-1047.

87. Мингазин А. Т. Вариация исходных параметров при синтезе рекурсивных цифровых фильтров//Электросвязь. –1989. -№ 11. -С. 53-54.
88. Benvenuto N., Marchesi M., Uncini A. Results on the application of simulated annealing algorithm for design of digital filters with powers-of- two coefficients// Proc. IEEE ICASSP.-1990.-Vol. 2.-P. 1301-1304.
89. Мингазин А. Т. Расчет режекторных и полосовых цифровых фильтров второго порядка с помощью номограмм//Электронная техника. Сер. 10, Микроэлектронные устройства.-1990. –Вып. 1. - С. 34-36.
90. Lim Y. C. Design of discrete-coefficient-value linear phase FIR filters with optimum normalized peak ripple magnitude//IEEE Trans. –1990.- Vol. CAS-37, № 12.-P. 1480-1486.
91. Improved design procedure for multiplierless FIR digital filters/H. Schaffeu, M.M. Jones, H. D. Griffiths, J. T. Taylor J. T. //Ellectron. Lett .- 1991.- Vol. 27, № 13.-P. 1142-1144.
92. Benvenuto N., Marchesi M., Uncini A. Applications of simulated annealing for the design of special digital filters//IEEE Trans. -1992, Vol. SP-40, №2.- P. 323-332.
93. Алексеев Л.В. Знаменский А. Е., Лоткова Е. Д. Электрические фильтры метрового и дециметрового диапазона. – М.: Связь, 1976. –281.
94. Современная теория фильтров и их проектирование/Под ред. Г. Темеша, С. Митра. - М.: Мир, 1977. –561 с.
95. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. - М.: Мир, 1978.-848 с.
96. Ланнэ А.А. Оптимальный синтез линейных электронных схем. – М.: Связь, 1978. –336 с.
97. Карманов В.Г. Математическое программирование. М.: Наука, 1975.-272 с.
98. Пападимитриу Х., Стейглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 512 с.
99. Таха Х. Введение в исследование операций: В 2 книгах. – М.: Мир, 1985. _ Кн.1 –479 с.; Кн. 2 –496 с.
100. Мину М. Математическое программирование. М.: Наука, 1990.-488 с..
101. Yang R. H., Lim Y.C. Grid density for design of one and two-dimensional FIR filters//Electron. Lett. - 1991.-Vol 27. № 22. –P. 2053-2054.
102. Liu B., Peled A. Heuristic optimization of the cascade realization of fixed-point digital filters.//IEEE Trans.-1975. – Vol. ASSP-23, № 5. P. 464-473.
103. Kjelstrom G., Taxen L. Stochastic optimization in system design// IEEE Trans.- 1981. – Vol. CAS-28, № 7. P. 707-715.
104. Kirkpatrick S., Gellat Jr. C.D., Vecchi M. Optimization by simulated annealing//Science. – 1983.- Vol. 220. – P. –680.
105. Catthoor F., De Man H., Vandewalle J. SAMURAI: a general and efficient simulated-annealing schedule, with fully adaptive annealing parameters//Integration< the VLSI Journal.-1988.-Vol. 6, № 2. –P. 147-178.
106. Kaiser J.F., Hamming R.W. Sharpening the response of symmetric nonrecursive filter by multiple use of the same filter// IEEE Trans.- 1977. – Vol. ASSP-25, № 5. P. 415-422.
107. 100-MHz 64-tap FIR digital filter in 0.8- m BiCMOS gate array/T. Yshino, R. Jain, P.T. Yang. et al.//IEEE J. of Solid-State Circuits.- 1990.- Vol. 25, № 6.- P. 1494-1501.
108. De Man E., Schulz M., Habercht W. A digital interpolation filter chip with 32 programmable coefficients for 80-MHz sampling frequency//IEEE J. of Solid-State Circuits.- 1991.- Vol. 26, № 3.- P. 435-439.
109. Jain R., Yang P.T., Yoshino T. FIRGEN: A computer-aided design system for high performance FIR integrated circuits//IEEE Trans.-1991.-Vol. SP-39, № 7.- P.1655-1668.
110. Lin T.J., Samueli H.A. 200-MHz x/sin(x) digital filter for compensation D/A converter frequency response distortion //IEEE J. of Solid-State Circuits.- 1991.- Vol. 26, № 9.- P. 1278-1285.