

5. Ariyavisitakul S. Characterizing the effects on nonlinear amplifiers in linear modulation for digital portable radio communications // IEEE Trans. on vehicular technology. – 1990. – Vol. 39. – № 4. – P. 383-389.
6. Chakroborty D. Experiments with high speed digital transmission satellite links // 3-th ICDS, Kyoto. – 1979. – P. 127-134.
7. Диденко М.Г. и др. Экспериментальное исследование спектральных свойств радиосигналов при офсетных методах мультиплексирования // Техника средств связи, Сер. ТРС. – 1983. – Вып.1 – С. 21-38.
8. Harris R. Transmission analysis and design for the ECC system // 4-th ICDS. Montreal. – 1978. – P. 81-94.
9. Спилкер Дж. Цифровая спутниковая связь. – М.: Связь, 1979.
10. Jones M. Laboratory hardware simulation measurements of 120 mBit/s QPSK TDMA transmission performance in the INTELSAT V system // 6-th ISDSC, phoenix, USA. – 1983. – P. I – A-1 – I – A-8.
11. Andrisano O. Non linear power amplifier effects on the performance of CPFSK systems. Alfa Frequenza. – 1986. – Vol. LV. Jan-Feb. – P. 12-20.
12. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов. – М.: Радио и связь, 1985.

Получено 4.11.93

УДК 621.372.54.037.372

## РАСЧЕТ ПОЛУПОЛОСНЫХ БИХ-ФИЛЬТРОВ

А.Т. Мингазин

Полуполосные цифровые фильтры находят широкое применение при выполнении операций прореживания и интерполяции в системах с многочастотной дискретизацией [1–4]. В качестве таких фильтров можно использовать БИХ-фильтры (с бесконечной импульсной характеристикой) Золотарева – Кауэра. Однако требования полуполосной симметрии приводят к экстремально низкой неравномерности АЧХ в полосе пропускания, что, в свою очередь, вызывает ряд трудностей при проектировании.

Так, по диаграммам, связывающим параметры АЧХ фильтров, невозможно оценить порядок передаточной функции; нельзя напрямую воспользоваться справочниками для определения передаточной функции соответствующего аналогового фильтра-прототипа, а существующие программы расчета требуют многократного их запуска для достижения необходимого соответствия между неравномерностью и ослаблением при заданных граничных частотах и порядке передаточной функции (результаты оказываются приближенными, могут возникать машинные сбои).

В [2] предложена интерактивная процедура пересчета передаточной функции аналогового фильтра Золотарева – Кауэра (по данным из справочника) для последующего ее преобразования в функцию полуполосного цифрового фильтра. Эта процедура относительно сложна и дает приближенные результаты.

В [3] утверждается, что полуполосные фильтры полностью определяются граничной частотой полосы пропускания (или задерживания) и порядком передаточной функции. Это дает основание предположить, что существуют точные расчетные соотношения, позволяющие обходиться без интерактивных приближенных процедур.

Цель данной статьи – получить точные выражения для коэффициентов передаточной функции полуполосных фильтров Золотарева – Кауэра и представить диаграмму, связывающую параметры АЧХ этих фильтров.

Полуполосная симметрия. Известно [1–4], что квадрат модуля частотной характеристики  $H(e^{j2\pi f})$  фильтра нижних частот (ФНЧ) обладает полуполосной симметрией, если

$$|H(e^{j2\pi f})|^2 + |H(-e^{j2\pi f})|^2 = 1, \quad (1)$$

а для граничных частот полосы пропускания и задерживания справедливо равенство

$$f_1 + f_2 = 0,5. \quad (2)$$

Предполагается, что частоты  $f_1, f_2$  и текущая частота  $f$  нормированы относительно частоты дискретизации, а  $|H(e^{j2\pi f})|_{\max} = 1$ .

Для полуполосных фильтров неравномерность АЧХ в полосе пропускания  $\Delta a$  связана с минимальным ослаблением АЧХ в полосе задерживания следующим соотношением [3]:

$$\Delta a = -10 \lg(1 - 10^{-\frac{\Delta a_0}{10}}). \quad (3)$$

Здесь  $\Delta a$  и  $\Delta a_0$  выражены в децибелах.

Проблема расчета полуполосных фильтров Золотарева – Кауэра. Представим передаточную функцию фильтра в виде:

$$H(z) = \prod_{i=1}^{N/2} H_i(z) = \prod_{i=1}^{N/2} \frac{1 + B_i z^{-1} + z^{-2}}{1 + A_i z^{-1} + A_i z^{-2}} \quad \text{для четных } N;$$

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 + A_{1(N+1)/2} z^{-1}} \prod_{i=1}^{(N-1)/2} H_i(z) \quad \text{для нечетных } N, \quad (4)$$

где  $N$  – порядок передаточной функции;  $z$  – комплексная переменная.

В общем случае коэффициенты в (4) – некоторые функции параметров АЧХ и  $N$  [5], причем для всех  $i$  в (4)

$$A_{ki} = \Phi_{ki}(\Delta a, f_1, f_2, N); B_i = \Psi_i(f_1, f_2, N), \quad (5)$$

где  $k = 1, 2$ .

Пусть  $f_2$  и  $N$  заданы. С учетом (2) и (3) из уравнения

$$N = F(\Delta a, a_0, f_1, f_2), \quad (6)$$

связывающего параметры АЧХ фильтра Золотарева – Кауэра с  $N$ , можно определить значение  $\Delta a$ . Заметим, что уравнение (6) решается аналитически [6].

Подстановка  $\Delta a, f_1, f_2, N$  в (5) даст коэффициенты полуполосного фильтра. Из-за экстремально малых значений  $\Delta a$ , особенно при  $a_0 > 40$  дБ (3) происходит потеря точности при вычислении коэффициентов или возникают машинные сбои.

Решение проблемы. Описанные трудности могут быть легко преодолены. В [4] дано косвенное доказательство того, что для рассматриваемых полуполосных ФНЧ полюсы  $H(z)$  находятся на мнимой оси  $z$ -плоскости. Это означает справедливость равенств  $A_i = 0$  для всех  $i$  в (4). Используя явные выражения для  $A_i$ , можно показать, что эти равенства действительно удовлетворяются, если

$$\operatorname{sc}(v, 1 - \operatorname{ctg}^4 \pi f_2) = \operatorname{tg} \pi f_2, \quad (7)$$

где  $\operatorname{sc}(\cdot)$  – эллиптический тангенс;  $v$  – некоторая функция от  $\Delta a, f_2, N$  (явное выражение для  $v$  громоздко и здесь не приводится). Можно также показать, что коэффициенты  $A_{2i}$  – функции непосредственно  $\operatorname{sc}(\cdot)$ . Поэтому замена  $\operatorname{sc}(\cdot)$  на  $\operatorname{tg} \pi f_2$  (7) в явных выражениях для  $A_{2i}$  позволяет исключить зависимость этих коэффициентов от параметра  $\Delta a$  и тем самым снять проблему его экстремально малых значений.

Таким образом, при фиксированном  $N$  коэффициенты полуполосного ФНЧ Золотарева – Кауэра полностью опреде-

ляются граничной частотой  $f_2$  или  $f_1$  (2), что согласуется с утверждением в [3].

Приведем окопательные выражения для коэффициентов рассматриваемых полуполосных фильтров. Учитывая, что  $A_{1i} = 0$  в (4) обозначим  $A_{2i}$  через  $A_i$ . Передаточная функция примет вид:

$$H(z) = \prod_{i=1}^{N/2} H_i(z) = \prod_{i=1}^{N/2} \frac{1 + B_i z^{-1} + z^{-2}}{1 + A_i z^{-2}} \text{ — для четных } N;$$

$$H(z) = (1 + z^{-1}) \prod_{i=1}^{(N-1)/2} H_i(z) \text{ — для нечетных } N. \quad (8)$$

Определим коэффициенты в (8):

$$A_i = \frac{1 + \Omega \operatorname{sn}^2(\cdot) - \sqrt{[1 - \operatorname{sn}^2(\cdot)][1 - \Omega^2 \operatorname{sn}^2(\cdot)]}}{1 + \Omega \operatorname{sn}^2(\cdot) + \sqrt{[1 - \operatorname{sn}^2(\cdot)][1 - \Omega^2 \operatorname{sn}^2(\cdot)]}};$$

$$B_i = 2 \frac{1 - \Omega \operatorname{sn}^2(\cdot)}{1 + \Omega \operatorname{sn}^2(\cdot)}; \quad (9)$$

$$i = \begin{cases} 1, 2, \dots, N/2 & \text{— для четных } N; \\ 1, 2, \dots, (N-1)/2 & \text{— для нечетных } N, \end{cases}$$

где  $\operatorname{sn}(\cdot) = \operatorname{sn}[\frac{N-2i+1}{N} K(\Omega^2), \Omega^2]$  — эллиптический синус;  $K(\cdot)$  — полный эллиптический интеграл 1-го рода;  $\Omega = \operatorname{ctg}^2 \pi f_2$ .

Поскольку для полуполосных фильтров имеют место равенства (2) и (3), то правая часть выражения (6) может быть представлена в виде функции двух параметров. Будем использовать параметры  $f_2$  и  $a_0$ . Тогда нетрудно показать, что в явном виде минимально допустимое  $N$  определяется как

$$N = \left\lceil \frac{K(\Omega^2)K(1-r^2)}{K(1-\Omega^2)K(r^2)} \right\rceil + 1,$$

где  $r = (10^{a_0/10} - 1)^{-1}$ , а  $|x|$  — целая часть  $x$ .

Заметим, что для получения передаточной функции фильтра верхних частот (ФВЧ) в (8) достаточно лишь поменять знак перед  $z^{-1}$ . Для ФВЧ частота  $f_1$  соответствует граничной частоте полосы задерживания, а  $f_2$  — полосы пропускания.

**Диаграмма для определения  $N$ .** На практике желательно иметь диаграмму, связывающую параметры АЧХ фильтров для различных значений  $N$ . Такая диаграмма позволяет быстро оценивать  $N$  или проводить "размен" между параметрами. На рис. 1 приведена подобная диаграмма для полуполосных фильтров Золотарева — Кауэра, представляющая собой семейство зависимостей ослабления  $a_0$  от граничной частоты  $f_2$  при различных  $N$ . Поскольку часто пользуются шириной переходной полосы  $\Delta f = f_2 - f_1$ , то на рис. 1 для удобства дана шкала  $\Delta f$ . Все кривые на рис. 1 пересекают ось  $a_0$  в точке 3,01 дБ.

Диаграмма построена по следующему соотношению:

$$a_0 = 10 \lg(1 + \epsilon_2^2),$$

где

$$\epsilon_2^2 = \begin{cases} \left[ \prod_{i=1}^{N/2} \Omega^2 \operatorname{sn}^4\left(\frac{2i-1}{N} K(\Omega^2), \Omega^2\right) \right]^{-1} & \text{— для четных } N; \\ \left[ \Omega^2 \prod_{i=1}^{(N-1)/2} \operatorname{cd}^4\left(\frac{2i}{N} K(\Omega^2), \Omega^2\right) \right]^{-1} & \text{— для нечетных } N; \end{cases}$$

$\operatorname{cd}(\cdot) = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sn}^2(\cdot)}{1 - \Omega^2 \operatorname{sn}^2(\cdot)}}$ ,  $\Omega$  определяется через  $f_2$  как и для (9).

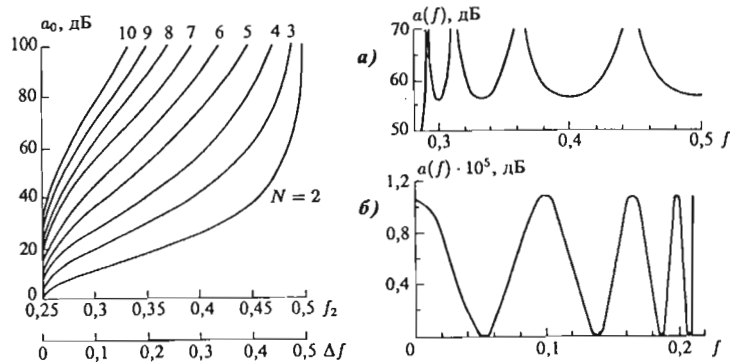


Рис. 1

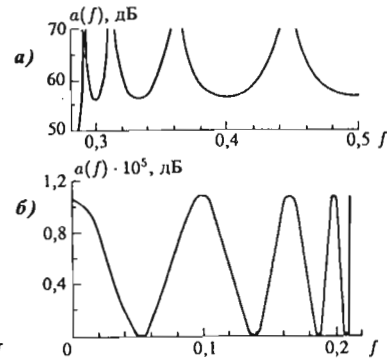


Рис. 2

Выражения для  $\epsilon_2^2$  получены на основе формул из [6] с учетом равенств (2) и (3).

Методика расчета фильтров заключается в следующем. По  $f_2$  и  $a_0$  с помощью приведенной диаграммы определяется  $N$ . Точному попаданию на одну из кривых могут соответствовать несколько отличные от исходных значения  $a_0$  и/или  $f_2$ . По (3) легко оценить получаемое значение  $\Delta a$ .

Расчет коэффициентов проводится по соотношениям (9).

**Пример расчета.** Рассмотрим полуполосный ФНЧ со следующими требованиями к АЧХ:  $f_2 = 0,29$ ;  $a_0 \geq 50$  дБ. По диаграмме на рис. 1 определяем  $N = 8$ . Коэффициенты, рассчитанные по (9), равны:  $A_1 = 0,836879$ ;  $A_2 = 0,534034$ ;  $A_3 = 0,238350$ ;  $A_4 = 0,030218$ ;  $B_1 = 0,526289$ ;  $B_2 = 0,770470$ ;  $B_3 = 1,291108$ ;  $B_4 = 1,890140$ .

Соответствующая характеристика ослабления  $a(f)$  приведена на рис. 2, а — для полосы задерживания и рис. 2, б — для полосы пропускания. Вычисленные значения  $a_0 = 56,055$  дБ и  $\Delta a = 1,077 \cdot 10^{-5}$  дБ соответствуют равенству (3).

**Заключение.** Соотношения, полученные для расчета полуполосных фильтров Золотарева — Кауэра, проще аналогичных соотношений для случая, когда требования полуполосной симметрии отсутствуют. В программе, разработанной автором, модификация, связанная с расчетом рассмотренных фильтров, свелась к добавлению всего лишь трех операторов.

Представленный в статье материал (формулы и диаграмма) снимает существующие проблемы расчета полуполосных БИХ-фильтров Золотарева — Кауэра.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вайдьянатхан П.П. Цифровые фильтры, блоки фильтров и полифазные цепи с многочастотной дискретизацией: Методический обзор. — ТИИЭР. — 1990. — Т. 76. — № 3. — С. 77-120.
2. Benvenuto N., Guidotti G., Mitra S.K. Digital filter bank with 65536 channels for spectrum analysis // Signal Processing. — 1991. — Vol. 23. — № 2. — P. 109-119.
3. Samuëli H. A low-complexity multiplierless half-band recursive digital filter desing // IEEE Trans. — 1989. — ASSP-37. — № 3. — P. 442-444.
4. Vaidyanathan P.P., Regalia P.A., Mitra S.K. Design of doublycomplementary IIR digital filters using a single complex allpass filter, with multirate applications // IEEE Trans. — 1987. — CAS-34. — № 4. P. 378-389.
5. Мингазин А.Т. Начальные приближения для синтеза цифровых фильтров с минимальной длиной слова коэффициентов // Электронная техника. Сер. 10. — 1983. — № 6. — С. 3-8.
6. Vlcek M., Unbehauen R. Degree, ripple and transition width of elliptic filters // IEEE Trans. — 1989. — CAS-36. — № 3. — P. 469-472.

Получено 24.01.94