

## СИНТЕЗ РЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ПРИ ОГРАНИЧЕННОЙ РАЗРЯДНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Успехи в технологии интегральных микросхем обусловили использование цифровой фильтрации при обработке сигналов в реальном масштабе времени. Однако скорость и точность такой обработки, а также сложность и стоимость ее реализации существенно зависят от разрядности коэффициентов передаточной функции цифрового фильтра (ЦФ). В связи с этим возникает необходимость разработки эффективных методов и алгоритмов синтеза ЦФ с ограниченной разрядностью их коэффициентов.

Известно большое число работ, посвященных этой проблеме, например [1—14], где для частных примеров рекурсивных ЦФ показана возможность уменьшения разрядности дробной части коэффициентов на 27—36% [2, 9], среднеквадратической ошибки АЧХ из-за квантования коэффициентов — в 1,4—11 раз [3], суммарного числа ненулевых символов в канонических знакоцифровых кодах коэффициентов (КЗЦК) — на 15—20% [14]. В [4, 5] обращено внимание на проблему выбора исходного решения для минимизации статистической — в [4] и реальной в [5] разрядности коэффициентов. Идея этих работ были развиты в [11, 12]. В [11] описан метод синтеза ЦФ с коэффициентами конечной разрядности, основанный на вариации исходных параметров характеристики затухания. Достоинством такого синтеза является малая размерность задачи оптимизации, не зависящая от порядка  $N$  ЦФ. В [12] предложен способ определения начальных приближений и показана его высокая эффективность. В частности, при  $N=2$  для ЦФ Чебышева I типа и эллиптических метод позволяет сразу, не прибегая к дополнительной оптимизации, получать решения с глобально минимальной разрядностью коэффициентов, что не гарантируется другими методами расчета.

В публикуемой статье формулируется задача синтеза ЦФ с минимальной разрядностью коэффициентов; дается графическая интерпретация способа [12]; предлагается алгоритм решения поставленной задачи, основанный на работах [11, 12], демонстрируется его эффективность.

Постановка задачи. Передаточная функция каскадного ЦФ, имеющая нули на единичной окружности в комплексной  $z$ -плоскости,

$$H(z, D) = \prod_{i=1}^L \frac{1 + B_{1i} z^{-1} + z^{-2}}{1 + A_{1i} z^{-1} + A_{2i} z^{-2}}, \quad (1)$$

где  $D = D(D_{11}, D_{21}, \dots, D_{3L}) = D(A_{11}, \dots, A_{1L}, A_{21}, \dots, A_{2L}, B_{11}, \dots, B_{1L})$  — вектор коэффици-

ентов,  $L = N/2$  (предполагается, что  $N$  — четное).

На основании [12]  $D = D(x)$  или, с учетом квантования  $D$ ,

$$D^* = D^*(x) = [D(x)/q] q, \quad (2)$$

где  $[u]$  означает округление  $u$  до целого;  $q$  — шаг квантования;  $x$  — вектор параметров требуемой характеристики затухания ЦФ. Если дробная часть искомого вектора коэффициентов  $D^*$  ограничена  $M$  двоичными разрядами, то  $q = 2^{-M}$ . Для ЦФ нижних частот (ЦФНЧ) Чебышева I типа  $x = x(x_1, x_2) = x(\Delta a, \omega_1)$ , а для эллиптических ЦФНЧ  $x = x(x_1, x_2, x_3) = x(\Delta a, \omega_1, \omega_2)$ . Здесь  $\Delta a$  — неравномерность характеристики затухания в полосе пропускания;  $\omega_1$  и  $\omega_2$  — граничные частоты полосы пропускания и задерживания. Заменяя в (1)  $D$  на  $D^*$ , с учетом (2) определим

$$\left. \begin{aligned} \tilde{H}(z, D^*) &= \tilde{H}[z, D^*(x)], \\ \Delta \tilde{a} &= \Delta \tilde{a}(x) = \\ &= 20 \lg \left[ \max_{0 \leq \omega \leq \omega_{2 \max}} |\tilde{H}(\cdot)| / \min_{0 \leq \omega \leq \omega_{1 \min}} |\tilde{H}(\cdot)| \right], \\ \tilde{a}_0 &= \tilde{a}_0(x) = \\ &= 20 \lg \left[ \max_{0 \leq \omega \leq \omega_{2 \max}} |\tilde{H}(\cdot)| / \max_{\omega_{2 \max} \leq \omega \leq \pi} |\tilde{H}(\cdot)| \right], \end{aligned} \right\} (3)$$

где  $a_0$  — минимальное затухание характеристики ЦФ в полосе задерживания;  $\omega_{1 \min}$ ,  $\omega_{2 \max}$  — заданные допустимые значения; символ  $\sim$  означает соответствие квантованию  $D$ ; частота дискретизации сигнала равна единице.

Зададимся целью найти допустимое решение, соответствующее вектору  $D^*$ , компоненты которого имели бы минимальное число разрядов  $M$ . Вышеизложенное позволяет свести эту задачу к следующему: определить вектор  $x \in S'(x)$  так, чтобы  $\Delta a(x) \leq \Delta a_{\max}$ ;  $\tilde{a}_0(x) \geq a_{0 \min}$  при минимальном  $M$ . Здесь  $S'(x)$  — область допустимого изменения  $x$ ,  $\Delta a_{\max}$  и  $a_{0 \min}$  — заданные допустимые значения.

Определение оптимального  $x$ , размерность которого не превышает 3, приводит благодаря (2) к одновременному нахождению искомого  $D^*$ .

Начальные приближения. Способ областей и доминирующих особенностей. На основании [12] для ЦФ Чебышева I типа  $S'(x) = S'(\Delta a, \omega_1)$

$$\Delta a \leq \Delta a_{\max};$$

$$f(\Delta a, a_0, \omega_1, \omega_2) \left| \begin{array}{l} a_n = a_{0 \text{ мин}} \\ \omega_z = \omega_{2 \text{ макс}} \end{array} \right. \leq N \leq f(\Delta a, a_0, \omega_1, \omega_2) \left| \begin{array}{l} a_0 = \Delta a_{\text{макс}} \\ \omega_z = \omega_{1 \text{ мин}} \end{array} \right. \quad (4)$$

где  $f(\cdot)$  — функция, связывающая  $\omega_1, \omega_2, \Delta a, a_0$  с  $N$ . Область  $S'(\cdot)$  определяет исчерпывающий набор параметров, который может быть выбран в качестве исходного для расчета ЦФ Чебышева I типа при  $a(\omega) \leq \Delta a_{\text{макс}}$ ;  $0 \leq \omega \leq \omega_{1 \text{ мин}}$  и  $a(\omega) \geq a_{0 \text{ мин}}$ ,  $\omega_{2 \text{ макс}} \leq \omega \leq \pi$ , где  $a(\omega)$  — характеристика затухания, причем,  $\max a(\omega) = 0$  дБ. При  $N = \text{const}$  в (1)  $A_{1i} = A_{1i}(\Delta a, \omega_1)$ ,  $A_{2i} = A_{2i}(\Delta a, \omega_1)$ ,  $B_{1i} = 2, i = 1, \dots, L$ . (5)

Суть способа определения начальных приближений поясним при  $N = 8$ ,  $\Delta a_{\text{макс}} = 2$  дБ,  $a_{0 \text{ мин}} = 84$  дБ,  $\omega_{1 \text{ мин}} = 2\pi \cdot 0,11$ ,  $\omega_{2 \text{ макс}} = 2\pi \cdot 0,22$ . На рис. 1, а показаны  $S'(\Delta a, \omega_1)$  [см. (4)] и сетка, образованная пересечением кривых, яв-

ляющаяся решениями уравнений (5) при  $A_{1i} = A_{1i}^*$ ,  $A_{2i} = A_{2i}^*$ ,  $q = q_{\text{макс}} = 2^{-6}$ ,  $i = 1$ .

Для ЦФ Чебышева I типа  $A_{11}, A_{21}$  соответствуют доминирующему полюсу  $H(z, D)$ , т.е. наиболее сильно влияющему на формирование характеристики затухания. Точки 1—5 (узлы сетки) на рис. 1, а, попавшие в  $S'(\cdot)$ , используются в качестве исходных при решении поставленной задачи. Начальный шаг квантования коэффициентов  $q_{\text{макс}}$  выбирается из условия наличия при  $q = q_{\text{макс}}$  и отсутствия при  $q > q_{\text{макс}}$  узлов сетки внутри  $S'(\cdot)$ . Заметим, что число точек, попадающих в  $S'(\cdot)$ , для другого примера ЦФ может оказаться иным, так как оно определяется размерами и местом  $S'(\cdot)$  в плоскости параметров  $\Delta a, \omega_1$ .

На рис. 1, б иллюстрируется эффект квантования всех коэффициентов  $H(z, D)$ , рассчитанных по координатам точки 1 на рис. 1, а. Координаты этой точки и точки  $i=1$  на рис. 1, б совпадают. Позиции  $i=2, 3, 4$  определены решением (5) для  $A_{1i} = A_{1i}^*$ ,  $A_{2i} = A_{2i}^*$ ,  $q = q_{\text{макс}}$ . При  $q=0$  имела бы место одна общая позиция с  $i=1$ . Следовательно, эффект квантования коэффициентов в плоскости  $\Delta a, \omega_1$  выражается в «расщеплении» этой позиции. Предложенный в работе [12] и поясненный здесь способ определения начальных приближений позволяет полностью устранить смещение позиции, соответствующей доминирующей особенности. Для эллиптических ЦФ  $S'(x)$  является трехпараметрической. При этом под доминирующей особенностью понимается полюсно-нулевая пара  $H(z, D)$ , соответствующая  $A_{1L}, A_{2L}, B_{1L}$  в (1) [12].

Алгоритм решения поставленной задачи заключается в итерационной процедуре поиска допустимого решения ( $\Delta a \leq \Delta a_{\text{макс}}$ ,  $a_0 \geq a_{0 \text{ мин}}$ ) при различных  $q$ , начиная с  $q = q_{\text{макс}}$  и сводится к следующему: 1. Определяется  $q = q_{\text{макс}}$ . 2. Определяется очередная начальная точка в  $S'(x)$ . 3. Если решение для этой точки оказывается допустимым, то задача решена. Иначе этапы 2, 3 повторяются до тех пор, пока не будут исчерпаны все возможные начальные точки. 4. Осуществляется возврат к первой начальной точке. 5. Производится поиск допустимого решения в окрестности этой точки. 6. Если допустимое решение найдено, то задача решена. Иначе выбирается следующая начальная точка и этапы 5, 6 повторяются до тех пор, пока не будут исчерпаны все возможные начальные точки. 7. Полагается  $q = q/2$  (т.е.  $M = M+1$ ). Повторяются этапы 2—7 до тех пор, пока не будет определено допустимое решение.

С целью ускорить получение допустимого решения первой выбирается начальная точка, соответствующая доминирующему полюсу, наиболее удаленному от единичной окружности в  $z$ -плоскости, ближайшему к оси  $\text{Im} z$ , и доминирующему нулю, ближайшему к этому полюсу. Остальные точки выбираются аналогично. В обоих направлениях, в сторону уменьшения и увеличения, осуществляется изменение одного компонента вектора  $x$ , соответствующего текущей начальной точке. При этом поиск ведется на отрезке, ограниченном окрестностью постоянства коэффициентов доминирующей особенности и областью  $S'(x)$ . Если все воз-

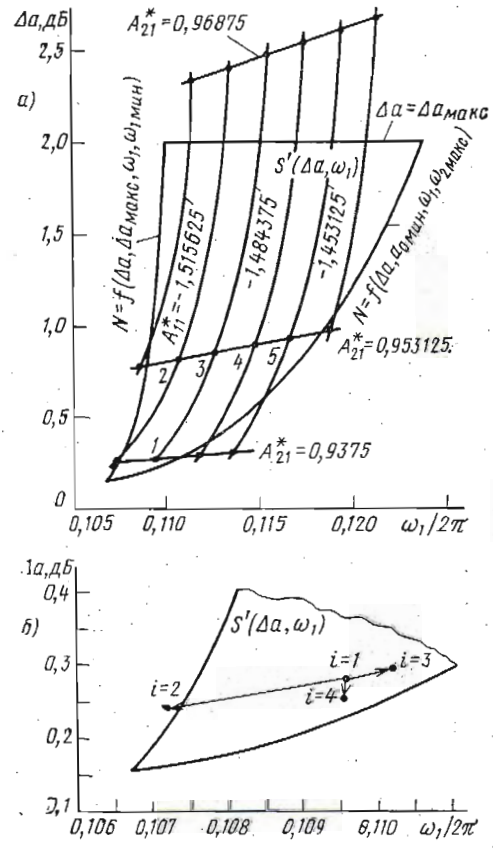


Рис. 1



$\Delta a_{MAX}$

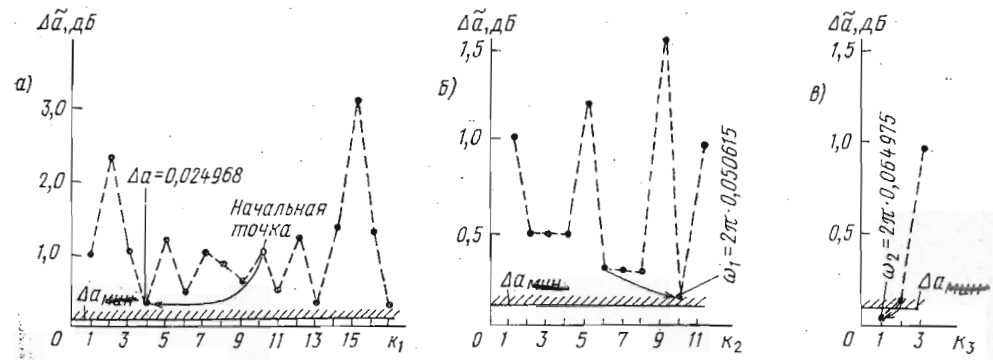


Рис. 2

возможные решения на данном отрезке, число которых конечно [11], исчерпаны, то значение компонента, приводящее к решению с минимальной  $\Delta a$ , используется в качестве исходного для дальнейшего исследования. Изменяется другой компонент и т. д., пока не будет найдено допустимое решение или не будут исчерпаны все компоненты. Шаг изменения компонент  $x$  выбирается путем проб так, чтобы в  $D^*(x)$  происходило изменение на  $q$  лишь одной  $k$ -й составляющей  $D^*_k(x)$ . Только в этом случае необходимо оценивать  $\Delta a$ . С помощью алгоритма определяются координаты в области  $S^*(x)$ , а следовательно, и искомые коэффициенты, квантованные с шагом  $q_0 \leq q_{max}$ , что соответствует  $M_0 \geq M_{мин}$ .

Процесс поиска допустимого решения для конкретного ЦФНЧ иллюстрируется на рис. 2, а—в. По осям абсцисс вместо  $\Delta a$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$  отложены числа  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$ , представляющие номера интервалов постоянства  $\Delta a$  (см. рис. 3, а в [11]). Для всех точек на рис. 2, а—в  $a_0 \geq a_{мин}$ .

Результаты синтеза цифровых фильтров. В табл. 1 приведены исходные требования к семи ЦФНЧ и значения  $N$ , а в табл. 2 — значения  $M_0$ , взятые из публикаций разных авто-

ров, а также полученные с помощью предложенного алгоритма.

В [7] для ЦФ-2 получено  $M_0 = 7 < M_{мин} = 8$ . Однако построенная характеристика по коэффициентам из [7] оказалась неудовлетворительной (см. рис. 3, а). Найденное решение было принято за допустимое из-за малого числа частотных точек, взятых для оценки  $\Delta a$  и  $a_0$ . Для ЦФ-4 и ЦФ-5 в [8] получено  $M_0 = 8$ , а в [9]  $M_0 = 7$  при использовании одного и того же алгоритма, причем для ЦФ-5  $M_0 < M_{мин} = 8$ .

Таблица 1

ЦФ	$\Delta a_{max}$ , дБ	$a_{мин}$ , дБ	$\omega_{1мин}/2\pi$	$\omega_{2max}/2\pi$	$N$
1	0,174	60,1	0,166667	0,188056	10
2	0,521	60,3	0,2	0,22	8
3	0,2	60	0,0625	0,075	8
4	0,104	40,1	0,05	0,065	6
5	0,521	50,7	0,1	0,125	6
6	0,521	40,1	0,027778	0,054872	4
7	0,869	30,9	0,1	0,15	4

Таблица 2

Алгоритм	Разрядность $M_0$						
	ЦФ-1	ЦФ-2	ЦФ-3	ЦФ-4	ЦФ-5	ЦФ-6	ЦФ-7
[1]	7	9	—	—	—	—	—
[2], [6]	—	—	8	—	—	—	—
[7]	6	?	—	—	—	—	—
[8]	—	—	—	8?	8?	8	—
[9]	—	—	—	7?	7?	—	—
[10]	—	—	—	—	—	—	6
Предлагаемый	6	8	8	7	8	7	5

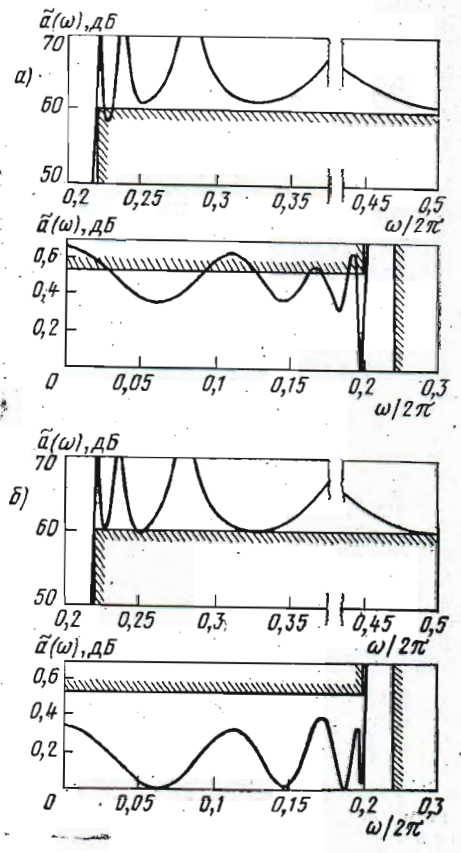


Рис. 3



В этих статьях не приведены найденные коэффициенты, что не позволяет установить истинные результаты. Попытки получить допустимые решения для ЦФ-2 и ЦФ-5 с помощью предложенного здесь алгоритма при  $M=7$  и пяти начальных точках, попадающих в  $S'(\Delta a, \omega_1, \omega_2)$  за счет ее расширения путем незначительного уменьшения  $a_{0\text{мин}}$ , не имели успеха. (Для ряда других ЦФ получены допустимые решения в окрестности начальных точек, расположенных вне  $S'(\cdot)$ , но вблизи ее границы.)

Однако некоторые решения оказались весьма близкими к допустимым. Характеристика затухания для ЦФ-2, соответствующая одному из начальных приближений (координаты в  $S'(\cdot)$ :  $\Delta a = 0,33804$  дБ;  $\omega_1 = 2\pi 0,200128$ ;  $\omega_2 = 2\pi 0,219876$ ), приведена на рис. 3,б.

Для ЦФ-1—ЦФ-5 использование более сложных стратегий поиска, чем предложенная (а именно, циклическое перечисление параметров  $\Delta a, \omega_1, \omega_2$  и поиск для всех шести вариантов их перечисления), при выборе наилучшего решения по минимаксному критерию, как в [1], не дало положительных результатов для  $M < M_0$ .

В табл. 3 для всех ЦФ, наряду с  $M_{\text{мин}}$ ,  $M_0$ , приведены сведения о числе начальных точек  $Q$  и количестве оценок  $V$ , необходимых для получения допустимых решений. Кроме того, указаны номера начальных точек  $l$ , для которых были найдены эти решения. В [1] для ЦФ-1 при  $M=6..7$  и  $M_0=7$ , потребовалось  $V=356$ , а в [7] при  $M_0=6-V=32$ . Помимо этого в алгоритме [7] необходимо выполнить оценки при многократном решении задачи на непрерывном множестве значений коэффициентов внутри цикла дискретной оптимизации. Однако число оценок не указано. В [7] проводился поиск и при  $M=5$ . Число выполненных оценок также не указано, но отмечено, что большой объем вычислений не привел к ожидаемому результату. Для ЦФ-3 в [6] при  $M_0=8$  значение  $V=159$ .

Таблица 3

ЦФ	$M_{\text{мин}}$	$M_0$	Q при		V при		l
			$M=M_{\text{мин}}$	$M=M_0$	$M=M_0$	$M=M_{\text{мин}}$	
1	5	6	11	38	49	576	1
2	8	8	13	13	1	1	1
3	7	8	1	5	16	71	1
4	6	7	1	2	30	54	1
5	8	8	4	4	1	1	1
6	7	7	7	7	5	5	5
7	3	5	2	38	1	44	1

Сопоставление представленных сведений с данными в табл. 3 свидетельствует о преимуществе предложенного алгоритма по числу оценок целевой функции. Для других рассматриваемых ЦФ (см. табл. 1) сведения по значению  $V$  в литературе отсутствуют.

В табл. 4 представлены результаты оптимизации. Для  $\Delta a, \omega_1/2\pi, \omega_2/2\pi, \tilde{\Delta a}, \tilde{a}_0$  в скобках, если имеется различие между оптимальными и начальными решениями, указаны значения, соответствующие начальному приближению. Параметры  $\tilde{\Delta a}, \tilde{a}_0$  рассчитаны по экстремальным значениям  $|\tilde{H}(z, D^*)|$  [см. (3)], которые оценивались по 500 частотным точкам. При же- лании по координатам из табл. 4 можно вос-

произвести найденные коэффициенты, выполнив расчет эллиптического ЦФ и округлив его коэффициенты до разрядности  $M_0$  из табл. 2 (нижняя строка). Так, для ЦФ-7  $A_{11}^* = -1,28125$ ;  $A_{21}^* = 0,46875$ ;  $B_{11}^* = 0,46875$ ;  $A_{12}^* = -1,4375$ ;  $A_{22}^* = 0,8125$ ;  $B_{12}^* = -1,03125$ .

Таблица 4

ЦФ	Координаты в $S'(\cdot)$			$\tilde{\Delta a}$ , дБ	$\tilde{a}_0$ , дБ
	$\Delta a$ , дБ	$\omega_1/2\pi$	$\omega_2/2\pi$		
1	0,002547 (0,002008)	0,167530	0,187956	0,135 (0,367)	61,7 (61,3)
2	0,349508	0,199827	0,219865	0,5	60,5
3	0,043683 (0,051875)	0,062122	0,075036	0,177 (0,374)	60,1 (60,6)
4	0,024968 (0,030940)	0,050615 (0,049935)	0,064975 (0,065047)	0,073 (1,06)	41,0 (41,9)
5	0,416593	0,100468	0,124819	0,506	50,9
6	0,431701	0,030800	0,053056	0,488	42,2
7	0,138031	0,094525	0,155027	0,771	31,3

Для всех рассмотренных ЦФ различие коэффициентов, соответствующих начальному и оптимальному решениям, составляет  $0..3 q_0$ , а именно  $2 q_0$  для ЦФ-1,  $3 q_0$  для ЦФ-3, ЦФ-4 и 0 для остальных ЦФ. В то же время применение других начальных приближений и алгоритмов приводит к отличиям, равным  $7 q_0$  [7],  $5 q_0$  [2, 6] и  $7 q_0$  [10], соответственно для ЦФ-1, ЦФ-3 и ЦФ-7.

Кроме того, для ЦФ-6 при  $M_0=7$  максимальное отличие коэффициентов, рассчитанных по координатам начальной точки из [8], от коэффициентов табл. 4 достигает  $8 q_0$ . По-видимому, по этой причине в [8] не удалось получить допустимое решение при  $M_0=7$ . Процесс поиска решения на рис. 2, а—в относится к ЦФ-4. При  $M=M_0$  только для этого ЦФ потребовалась вариация по всем трем компонентам  $\Delta a, \omega_1, \omega_2$ .

Дополнительные возможности алгоритма. Пример 1. Для ЦФ-1 при  $M=M_0=6$  в окрестности каждой из 38 начальных точек процесс поиска в модифицированном алгоритме не прекращался после нахождения допустимого решения, а продолжался, пока не исчерпывались все компоненты  $x$ . Было найдено 18 вариантов допустимых решений в окрестностях точек с  $l=1..4, 11, 15, 18, 22$ . В табл. 5 приведены сведения для четырех вариантов, наилучших по одному из следующих критериев: минимум  $\Delta a$ , максимум  $\tilde{a}_0$ , минимальное суммарное число ненулевых символов  $\Sigma$  в КЗЦК коэффициентов (включая масштабные), минимальное выходное отношение шум округления-сигнал  $\tilde{R}$ . Значения  $\tilde{R}$  даны с точностью до дисперсии источника шума округления  $\sigma_0^2$  в каскадном ЦФ, состоящем из звеньев прямой формы. Детали расчета  $\tilde{R}$  изложены в [15, 16].

Получение минимального  $\tilde{R}$  для  $l=1$  неслучайно, так как предложенная очередность исследования начальных точек благоприятна в отношении меньшего результирующего шума округления для решений в первых начальных точках. Представленные в табл. 5

Таблица 5

№ вари- анта	Координаты в $S'(\cdot)$			$\tilde{\Delta a}$ , дБ	$\tilde{a}_0$ , дБ	$\Sigma$	$\tilde{R}/\sigma_0^2$	l
	$\Delta a$ , дБ	$\omega_1/2\pi$	$\omega_2/2\pi$					
1	0,002547	0,167530	0,187956	0,135	61,7	56	55	1
2	0,003305	0,166566	0,187934	0,060	64,4	57	57	3
3	0,027402	0,168620	0,182712	0,146	63,2	50	93	15
4	0,055570	0,169230	0,186682	0,150	70,5	51	104	18



результаты могут быть улучшены за счет увеличения  $M$ .

**Пример 2.** Требуется рассчитать ЦФНЧ при  $\Delta a_{\max} = 0,8$  дБ,  $a_{0\min} = 43$  дБ,  $\omega_{1\min} = 2\pi \cdot 0,15$ ,  $\omega_{2\max} = 2\pi \cdot 0,3$ ,  $N=4$  и при условии, что число ненулевых символов  $J$  в КЗЦК каждого коэффициента ЦФ не превышает 2.

При  $q=q_{\max} = 2^{-2}$  число начальных приближений равно 8. Первое из них оказалось допустимым. Координаты точки в  $S'(\cdot)$ :  $\Delta a = 0,419347$  дБ;  $\omega_1 = 2\pi \cdot 0,198040$ ;  $\omega_2 = 2\pi \cdot 0,300972$ . Параметры  $\Delta a = 0,77$  дБ,  $a_0 = 44,6$  дБ. Найденные коэффициенты:  $A_{11}^* = 0,75$ ,  $A_{21}^* = 0,25$ ;  $B_{11}^* = 1,75$ ;  $A_{12}^* = -0,5$ ;  $A_{22}^* = 0,75$ ;  $B_{12}^* = -0,75$  можно представить в КЗЦК с  $J \leq 2$ . В [13] для получения решения при  $J=2$  и  $q=2^{-6}$  потребовалось 300 оценок целевой функции.

**Заключение.** Представленные примеры ЦФНЧ (ЦФ-1—ЦФ-7) являются исчерпывающими относительно известных и доступных литературных источников, в которых ставилась задача синтеза ЦФНЧ при минимальной разрядности коэффициентов в плане удовлетворения заданных допусков в полосах пропускания и задерживания характеристики затухания.

Разработанный алгоритм, основанный на вариации исходных параметров характеристики затухания, позволяет получить аналогичные или улучшенные результаты (для трех из семи ЦФ разрядность коэффициентов уменьшена на 1 бит) по сравнению с опубликованными ранее. При этом требуется значительно меньшее число оценок целевой функции, чем при использовании существующих алгоритмов, основанных на вариации самих искомым коэффициентов. Представляется, что для ЦФ высоких порядков требуемое число оценок, благодаря применению предложенного алгоритма, может быть снижено в десятки или даже сотни раз.

Приведенные примеры иллюстрируют хорошее качество начальных приближений, полученных по способу [12], в котором учитывается специфика выбранной структуры ЦФ и применяемых аппроксимирующих функций. Использование начальных приближений [12] позволит повысить эффективность существующих алгоритмов. Кроме того, решения, полученные с помощью предложенного алгоритма, могут быть сами применены в качестве исходных. Вопрос о целесообразности такого подхода пока открыт.

Предпринятые попытки найти решения при  $q > q_{\max}$  с помощью описанного алгоритма и его модификаций не имели успеха. В известной литературе такие решения также отсутствуют. Можно предположить, что  $q_{\max}$  является верхней границей, а найденные решения при  $q = q_{\max}$  соответствуют глобально минимальной разрядности коэффициентов  $M = M_{\min}$ .

По материалам, представленным в статье, можно сделать другие полезные выводы, касающиеся деталей проблемы синтеза ЦФ с учетом ограниченной разрядности коэффициентов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Steiglitz K. Design short-word recursive digital filters. — Proc. of the 9th Allerton conf. on CAS theory, 1971.

2. Boite R., Dules H., Leich H. Optimization on digital filters in the discrete space of coefficients. — Electronics Letters, 1974, v. 10, № 10.
3. Charalambous C., Best M. J. Optimization of recursive digital filters with finite word lengths. — IEEE Trans., 1974, ASSP-22, № 6.
4. Chrochiere R. E. A new statistical approach to the coefficient word length problem for digital filters. — IEEE Trans., 1975, CAS-22, № 3.
5. Dehner G. On the design Causer filters with coefficients of limited wordlength. — AEU, 1975, B. 29, № 4.
6. Dühamel P. An algorithm for the design of digital filters with finite-wordlength coefficients. — IEEE Int. conf. on ASSP, 1977.
7. Brglez F. Digital filter design with short word-length coefficients. — IEEE Trans., 1978, CAS-25, № 12.
8. Kwan H.—K. On the problem of designing IIR digital filters with short coefficient word lengths. — IEEE Trans., 1979, ASSP-27, № 6, Part-1.
9. Kwan H.—K. Method for designing recursive digital filters with short word-length. — Electronics Letters, 1979, v. 15, № 4.
10. Ishii R. Digital filter design with finite word-length coefficients. — The transactions of the institute of electronics communication engineers of Japan, 1982, v. 65-A, № 1.
11. Мингазин А. Т. Метод синтеза цифровых фильтров с коэффициентами конечной разрядности. — Электросвязь, 1983, № 7.
12. Мингазин А. Т. Начальные приближения для синтеза цифровых фильтров с минимальной длиной слова коэффициентов. — Электронная техника, сер. 10, 1983, № 6.
13. Бондаренко Н. Н., Митрофанова Т. С. Синтез передаточных функций рекурсивных цифровых фильтров с коэффициентами специального вида. — Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1985, т. 28, № 8.
14. Брунченко А. В., Игнатьев А. А. Выбор квантования коэффициентов в цифровых фильтрах. — Изв. вузов СССР. Радиоэлектроника, 1985, т. 28, № 8.
15. Мингазин А. Т., Быстров А. Н., Сазонов А. А. Влияние порядка передаточной функции на разрядность коэффициентов и шум округления рекурсивного цифрового фильтра. — Расчет и проектирование элементов и узлов микросистемных радиотехнических систем и цепей СВЧ. — М.: МИЭТ, 1982.
16. Мингазин А. Т., Быстров А. Н. Расчет результирующей дисперсии шума округления на выходе каскадных цифровых фильтров. — Микросистемные радиотехнические устройства обработки информации и техника СВЧ. — М.: МИЭТ, 1981.

Статья поступила 25 ноября 1986 г.