А. Т. Мингазин

УДК 621.372.54.037.372

# Разрядность коэффициентов рекурсивных цифровых фильтров при упрощенном методе синтеза

**Рассмотрена задача определения разрядности коэффициентов рекурсивных цифровых фильтров; показано, что при использовании наиболее распространенного в инженерной практике упрощенного подхода к решению этой задачи, разрядность коэффициентов может быть сильно завышена.**

Важным этапом проектирования цифровых фильтров (ЦФ) является определение разрядности двоичных коэффициентов передаточной функции, которую желательно минимизировать. Для этого, применительно к рекурсивным избирательным ЦФ, можно использовать методы синтеза передаточных функций при ограниченной разрядности коэффициентов [1—8]. Однако в инженерной практике применяется упрощенный подход [9, 10], заключающийся в нахождении коэффициентов с высокой точностью (по данным, имеющимся в справочниках по расчету фильтров или выбранным, руководствуясь опытом проектирования) и последующим их округлении до минимальной разрядности, при которой еще удовлетворяются требования к характеристике затухания. Покажем, что при использовании такого подхода разрядность коэффициентов может быть сильно завышена.

В табл. 1 приведены шесть вариантов требований к граничным частотам характеристики затухания ЦФ нижних частот при $\Delta a_{\max}=0{,}3$ дБ, $a_{0\,\min}=40$ дБ. Каждому из вариантов удовлетворяет эллиптический ЦФ четвертого порядка, полученный методом билинейного $z$-преобразования аналогового фильтра — прототипа. Если в качестве исходных параметров для расчета ЦФ задаться граничными частотами полос пропускания и задерживания $\omega_1=\omega_{1\min}$ и $\omega_2=\omega_{2\max}$, то исходный параметр $\Delta a$ — неравномерность характеристики затухания в полосе пропускания — может быть выбран любым из диапазона $\Delta a_{\min}\leqslant\Delta a\leqslant\Delta a_{\max}$ (в данном случае $\Delta a_{\min}\approx0{,}07$ дБ, так как $\operatorname{tg}(\omega_{2\max}/2)/\operatorname{tg}(\omega_{1\min}/2)\approx2$ для всех шести ЦФ). Расчет ЦФ при $\Delta a<\Delta a_{\min}$ привел бы к характеристике с минимальным затуханием в полосе задерживания $a_0<a_{0\min}=40$ дБ.

**Таблица 1**

| Варианты | $\omega_{1\,\min}/(2\pi)$ | $\omega_{2\,\max}/(2\pi)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0,0125 | 0,025 |
| 2 | 0,025 | 0,0497 |
| 3 | 0,05 | 0,0976 |
| 4 | 0,1 | 0,183 |
| 5 | 0,25 | 0,352 |
| 6 | 0,45 | 0,475 |

Число интервалов в указанном диапазоне $\Delta a$, для которых можно рассчитать различные передаточные функции с коэффициентами ограниченной разрядности, конечно [8], т. е. имеется конечное число возможных решений. При достаточной разрядности коэффициентов часть этих решений (допустимые решения) будет удовлетворять заданным требованиям к характеристике затухания ЦФ.

На рис. 1 представлены зависимости $P$ (число допустимых решений/число возможных решений) от $M$ (разрядность дробной части коэффициентов) для всех шести ЦФ каскадной формы. Из рассмотрения зависимостей следует, что всегда имеется возможность получения недопустимых решений даже при больших $M$, в особенности для ЦФ с низкими $\omega_{1\min}$.

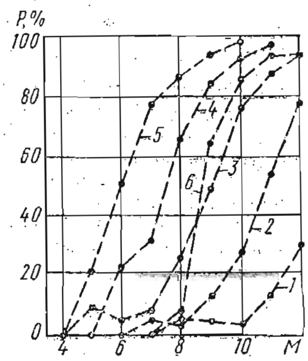


Рис. 1

По рис. 1 для всех вариантов ЦФ можно определить минимальные значения $M$, которые соответствуют методу минимизации $M$, основанному на оптимальном выборе исходной $\Delta a$ (частный случай метода [8]). Эти значения $M$, а также полученные упрощенным методом при $\Delta a=0{,}1$ дБ, $\Delta a=0{,}28$ дБ (для этих $\Delta a$ имеются расчетные таблицы в [11]) и $\Delta a=\Delta a_{\min}$ (как рекомендовано в [9]) представлены в табл. 2.

Сопоставление данных табл. 2 свидетельствует о том, что упрощенный метод в сравнении с методом оптимального выбора $\Delta a$ может приводить как к аналогичным, так и к сильно завышенным $M$ (например, в 2 и в 2,4 раза при $\Delta a=0{,}1$ дБ и $\Delta a=0{,}28$ дБ для варианта 3), что и требовалось показать. Интересно, что использование начальных приближений [12] и вариации $\omega_1$ и $\omega_2$, наряду с $\Delta a$, позволило уменьшить $M$, полученное оптимальным выбором $\Delta a$, лишь для варианта 4 и только на 1 бит.

Таблица 2

| Метод выбора $\Delta a$ | | Разрядность $M$ для вариантов | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Оптимальный | | 8 | 7 | 5 | 6 | 5 | 8 |
| Упрощенный | 0,1 | 12 | 10 | 10 | 6 | 5 | 9 |
| | 0,28 | 16 | 13 | 12 | 11 | 7 | 11 |
| | $\Delta a_{min}$ | 12 | 11 | 8 | 8 | 5 | 12 |

На рис. 2, *а—в* представлены распределения допустимых решений по $\Delta a$ в диапазоне $\Delta a_{min} \ldots \Delta a_{max}$ при различных $M$ (*а* — вариант 1; *б* — вариант 4; *в* — вариант 6). По осям ординат отложено $P'$ — отношение числа допустимых решений к числу возможных решений, приходящееся на интервал $(\Delta a_{max} - \Delta a_{min})/10$. Возможное завышение $M$, свойственное упрощенному подходу, легко объясняется характером

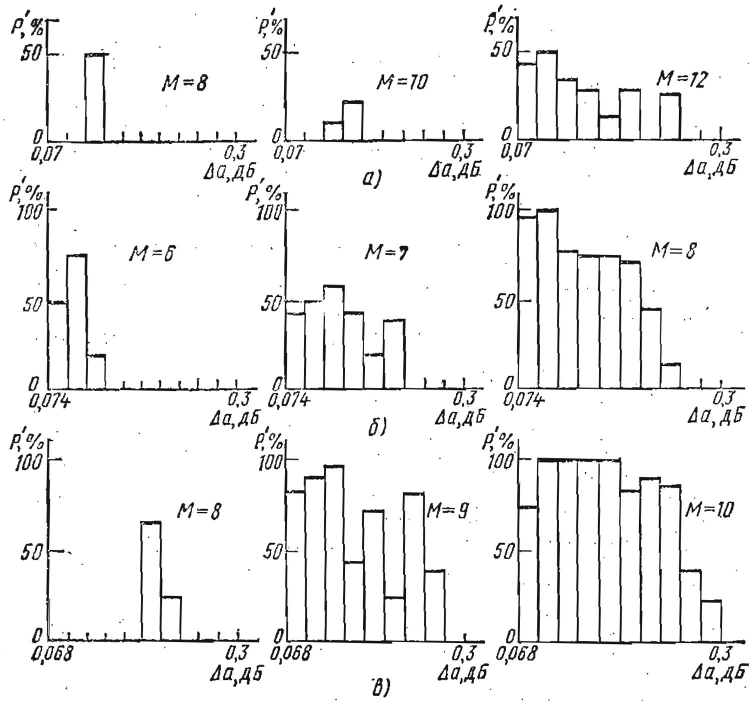


Рис. 2

этих распределений. В самом деле, если $\Delta a$ выбирается произвольно, как в упрощенном подходе, то достаточную гарантию получения допустимого решения можно дать лишь при больших $M$. Как видим, процесс увеличения числа допустимых решений с ростом $M$ на рис. 2, *а, б* является более медленным, чем на рис. 2, *в*, т. е. более медленным для ЦФ с низкими $\omega_{l\,min}$ (это также следует из поведения кривых *1—3* на рис. 1). Поэтому для этих ЦФ упрощенный подход, как правило, приводит к большему завышению $M$ (см. табл. 2, например, для вариантов 1 и 6 при $\Delta a = 0{,}28$ дБ). Из рис. 2, *а—в* видно, что по мере роста $M$ допустимые решения в большей степени группируются со стороны малых $\Delta a$, поэтому (см. табл. 2) для $\Delta a = 0{,}1$ дБ и $\Delta a = \Delta a_{min}$ почти для всех вариантов (исключением является вариант 6 при $\Delta a = \Delta a_{min}$) получены меньшие $M$, чем при $\Delta a = 0{,}28$ дБ. Согласно рис. 2, *а—в*, табл. 1 и 2 для ЦФ с низкими и средними $\omega_{l\,min}$ выбор $\Delta a = \Delta a_{min}$ является предпочтительнее выбора $\Delta a$ в окрестности $\Delta a = \Delta a_{max}$, но не является таковым для других $\Delta a$.

В общем случае характер распределений, подобных приведенным на рис. 2, *а—в*, будет зависеть от структуры и типа ЦФ, от требований к характеристике затухания и вида ее аппроксимации. В связи с этим следует аккуратно применять упрощенный метод синтеза ЦФ, который не позволяет строго учесть особенности конкретного проектирования и поэтому не дает гарантии в том, что разрядность коэффициентов не будет сильно завышена, особенно когда расчет выполняется для одного набора исходных параметров.

## Литература


1. Эвенхауз. Зарубежная радиоэлектроника, 1973, № 8.
2. Boite R., Dules H., Leich H. Electronics Letters, 1974, v. 10, № 10.
3. Ланнэ А. А., Шевкопляс Г. Б. Теоретическая электротехника, 1978, № 24.
4. Brglez F. IEEE Trans., 1978, CAS-25, № 12.
5. Kwan H.-K. IEEE Trans., 1979, ASSP-27, № 6, Part 1.
6. Жуков С. Г. Радиотехника, 1980, т. 35, № 4.
7. Ishii R. The Transactions of the Institute of Electronics Communication Engineers of Japan, 1982, т. 65-A, № 1.
8. Мингазин А. Т. Электросвязь, 1983, № 7.
9. Antoniou A., Charalambous C., Motamedi Z. IEEE Trans., 1983, CAS-30, № 3.
10. Справочник: Цифровая обработка сигналов / Гольденберг Л. М., Матюшкин Б. Д., Поляк М. Н. — М.: Радио и связь, 1985.
11. Христиан Э., Эйзенман Е. Таблицы и графики по расчету фильтров. — М.: Связь, 1975.
12. Мингазин А. Т. Электронная техника, 1983, сер. 10, № 6.


*Поступила после доработки 11 мая 1986 г.*

**D** ДЕПОНИРОВАННАЯ КНИГА

В. С. Самойлов, И. А. Воробьева, В. Б. Грузиненко

УДК 621.372.412

# Элементы теории низкочастотных пьезоэлектрических резонаторов

Пьезоэлектрические кристаллические резонаторы относятся к основным элементам, определяющим характеристики многочисленных систем связи. Их высокая стабильность и добротность позволили, например, создать системы беспоисковой и бесподстроечной радиосвязи, обеспечили надежность космической связи, а также управление космическими объектами и т. д.

Дальнейшее развитие многих отраслей современной техники связано с получением стабильных частот, выделением полезных сигналов и подавлением помех. В связи с этим требования к надежной и устойчивой работе пьезоэлектрических генераторов и фильтров в широких интервалах температур и при жестких внешних воздействиях непрерывно возрастают. Решение возникающих проблем требует больших усилий со стороны разработчиков, а исследования становятся все более длительными и дорогостоящими, нуждающимися в сложном оборудовании. Значительно уменьшить объем необходимых исследований можно, используя современные быстродействующие ЭВМ, позволяющие заменить ряд экспериментальных исследований теоретическими. К сожалению, число разработчиков, достаточно полно владеющих современной теорией пьезоэлектрических устройств, невелико. Это объясняется прежде всего ее сложностью и отсутствием публикаций, в которых основные положения были бы изложены систематически и последовательно.

В работе основное внимание уделено общим положениям теории. Что же касается вопросов ее конкретных приложений к пьезоэлектрическим резонаторам, то здесь рассмотрены лишь простейшие из них — низкочастотные.

В первой главе выведены уравнения механического и электрического состояний, кратко описаны свойства пьезоэлектриков. Уравнению механического состояния предшествует определение тензоров механических напряжений и деформаций, пояснение их физического смысла. Прослежена связь между ними, описываемая обобщенным законом Гука, учитывающим анизотропию упругих свойств. Выведено уравнение динамического упругого равновесия и механических граничных условий:

$$\partial T_{ij}/\partial x_j = \rho \partial^2 U_i/\partial t^2,$$

где $T_{ij}$ и $U_i$ — компоненты тензора механических напряжений и вектора механических перемещений; $\rho$ — плотность материала; $t$ — время; $x_j$ — прямоугольные координаты.

При выводе уравнений электрического состояния использовано определение понятий электрического поля, потенциала, векторов напряженности и индукции. В итоге получено уравнение Пуассона и электрических граничных условий: $\Delta\varphi_э = -\rho_V$, где $\Delta =$