1982

УДК 621.372.542

А.Т.Мингазин, А.Н.Быстров, А.А.Сазонов

ВЛИЯНИЕ ПОРЯДКА ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ НА РАЗРЯДНОСТЬ КОЭФФИЦИЕНТОВ И ШУМ ОКРУГЛЕНИЯ РЕКУРСИВНОГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

Рассмотрены чебышевские каскадные рекурсивные цифровые фильтры нижних частот. Показано, что, увеличивая порядок передаточной функции при фиксированных предельно-допустимых параметрах АЧХ, можно одновременно снизить разрядность коэффициентов и уровень шума округления результатов арифметических действий.

В работах [1, 2] на конкретных примерах было показано, что при увеличении порядка n каскадного рекурсивного эллиптического цифрового фильтра (ЦФ) нижних частот существенно уменьшается разрядность коэффициентов передаточной функции при удовлетворении заданных требований к АЧХ. Однако с увеличением n в каскадной реализации возрастает число источников шума, обусловленных округлением результатов арифметических действий. При этом может оказаться, что ЦФ с бо́льшим значением n будет характеризоваться и бо́льшим уровнем шума округления. Для компенсации этого эффекта потребуется дополнительное наращивание разрядности в блоках ЦФ. В [1, 2] не рассматривались шумовые свойства ЦФ в зависимости от n .

В данной работе для конкретных требований к АЧХ чебышевских каскадных ЦФ нижних частот, оперирующих с числами в форме с фиксированной запятой, исследуются зависимости от n как разрядности коэффициентов, так и уровня шума округления.

Квантование коэффициентов

Передаточную функцию чебышевского ЦФ нижних частот, состоящего из N каскадно соединенных звеньев прямой формы, представим следующим образом:

для четного n

$$H(z)=\prod_{k=1}^{N}\frac{B_k(z)}{A_k(z)}=\prod_{k=1}^{N}b_k\,\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}, \qquad (1)$$

для нечетного n

$$H(z)=\prod_{k=1}^{N}\frac{B_k(z)}{A_k(z)}=b_1\frac{1+z^{-1}}{1+a_{11}z^{-1}}\prod_{k=2}^{N}b_k\,\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}, \qquad (2)$$

где z – комплексная переменная; a_{1k}, a_{2k} – коэффициенты, полученные в ходе решения задачи аппроксимации; b_k – масштабные коэффициенты; $N=\frac{n}{2}$ и $N=\frac{n+1}{2}$ соответственно для четного и нечетного n.

При реализации ЦФ коэффициенты a_{1k}, a_{2k} и b_k должны быть представлены двоичными числами с ограниченной разрядностью, т.е. должны быть квантованы. Для передаточной функции, имеющей вид (1) или (2), квантование коэффициентов целесообразно проводить в два этапа:

1) оптимальное квантование [2] коэффициентов a_{1k}, a_{2k};

2) квантование (усечение) масштабных коэффициентов b_k.

Оптимальное квантование позволяет минимизировать число разрядов M_a в дробной части коэффициентов a_{1k}, a_{2k}. Существуют различные подходы к решению задачи минимизации разрядности коэффициентов. В данной работе используется метод, основанный на оптимальном выборе исходных параметров АЧХ цифрового фильтра. Подобный подход применялся в работах [1, 3].

Масштабные коэффициенты b_k выбираются исходя из условия предотвращения переполнений в ЦФ [2,4,5]. При действии на входе рассматриваемого ЦФ синусоидального сигнала это условие имеет вид

$$|G_k(z)|_{max}\le 1 \quad \text{для } k=1,\,2,\ldots,N, \qquad (3)$$

где $G_k(z)$ – передаточная функция от входа ЦФ до k-го узла суммирования.

Для максимизации динамического диапазона ЦФ необходимо условие (3) представить в виде равенства. С учетом квантования коэффициентов b_k равенство в (3) может быть выполнено лишь приближенно и тем точнее, чем больше разрядность дробной части коэффициентов M_b Очевидно, что расчет b_k с учетом их усечения в отличие от округления будет гарантировать выполнение условия (3). Целесообразно положить $M_b = M_a$, однако при этом может оказаться, что после квантования для некоторого k b_k будет равно нулю, а это недопустимо. Поэтому, учитывая $0 < b_k < 1$, будем выбирать M_b как

$$M_b = max\left\{M_a, [-\log_2 b_{k\,min}]\right\}, \qquad (4)$$

где символ $[x]$ означает взятие целой части x.
Очевидно, что значение M_b может быть всегда увеличено, если при выборе его по (4) $|H(z)|_{max} = |G_N(z)|_{max}$ окажется меньше минимально-допустимой величины.

Отношение шум/сигнал на выходе ЦФ

Результирующая дисперсия шума на выходе рассматриваемого ЦФ, обусловленная округлением результатов арифметических действий, будет равна

$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma_0^2}{2\pi j}\sum_{i=1}^{N}\oint\prod_{k=i}^{N}\frac{B_k(z)B_k(z^{-1})\,dz}{A_k(z)A_k(z^{-1})\,z}, \qquad (5)$$

где σ_0^2 – дисперсия источника шума округления каждого из N звеньев ЦФ; $B_k(z) = 1$ при $k=i$.
Методика вычисления σ_1^2 была подробно изложена в [6], где также приведена шумовая модель ЦФ.

Отношение шум/сигнал на выходе ЦФ при условии, что на входе действует синусоидальный сигнал, будет равно

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{2\sigma_1^2}{|H(z)|^2_{max}}. \qquad (6)$$

Особенность каскадной реализации заключается в существенной зависимости отношения σ_1^2/σ_2^2 от упорядочения звеньев ЦФ, а для таких ЦФ как эллиптические – и от группировки полюсно-нулевых пар передаточных функций звеньев [2,4,5]. Для минимизации σ_1^2/σ_2^2

в дальнейшем будем использовать эвристический метод упорядочения звеньев ЦФ, описанный в [5]. Выбор наилучшего упорядочения звеньев по критерию минимума σ_1^2/σ_2^2, а не σ_1^2, как это обычно делается, обусловлен введением в рассмотрение в данной статье квантования коэффициентов b_k, поскольку при этом $|H(z)|_{max}$ оказывается зависимым от упорядочения звеньев. Без учета квантования b_k $|H(z)|_{max} = 1$ независимо от порядка следования звеньев и минимизация σ_1^2/σ_2^2 сводится к минимизации σ_1^2.

Зависимость эффектов конечной разрядности в ЦФ от порядка передаточной функции

На основании сделанных замечаний о методах квантования коэффициентов, масштабирования и упорядочения звеньев расчеты для каждого из рассматриваемых ниже ЦФ будем проводить в следующей последовательности. В начале осуществляется расчет коэффициентов a_{1k}, a_{2k} с учетом их оптимального квантования. Затем для полученного набора квантованных коэффициентов определяется наилучшее упорядочение звеньев ЦФ по критерию минимума отношения шум/сигнал. При этом для каждого упорядочения предварительно проводится масштабирование с учетом усечения коэффициентов b_k.

Эта последовательность расчета может быть использована не только для рассматриваемых здесь чебышевских ЦФ нижних частот, но и для других типов ЦФ, соответствующих аналоговым фильтрам-прототипам с полиномиальными передаточными функциями.

Для исследования влияния порядка передаточной функции на допустимую разрядность в представлении коэффициентов a_{1k}, a_{2k}, b_k и на отношение шум/сигнал σ_1^2/σ_2^2 зададим следующие требования к АЧХ цифровых фильтров нижних частот:

неравномерность в полосе пропускания не более 2 дБ;

затухание в полосе заграждения не менее 84 дБ;

полоса пропускания от 0 до 0,04;

полоса заграждения от 0,08 до 0,5.

При этом предполагается, что частота дискретизации входного сигнала равна единице.

Данным требованиям отвечает чебышевский ЦФ с минимальным значением $n=n_{min}=8$. На рис.I представлены зависимости разрядностей дробной части коэффициентов a_{1k}, a_{2k} и b_k от n. Как следует из рисунка кривые $M_a(n)$ и $M_b(n)$ имеют наибольшую крутизну спада при незначительном увеличении n и для представления коэффициентов при $n > 9$ требуется несколько бо́льшая (на I-2 бит) разрядность, чем

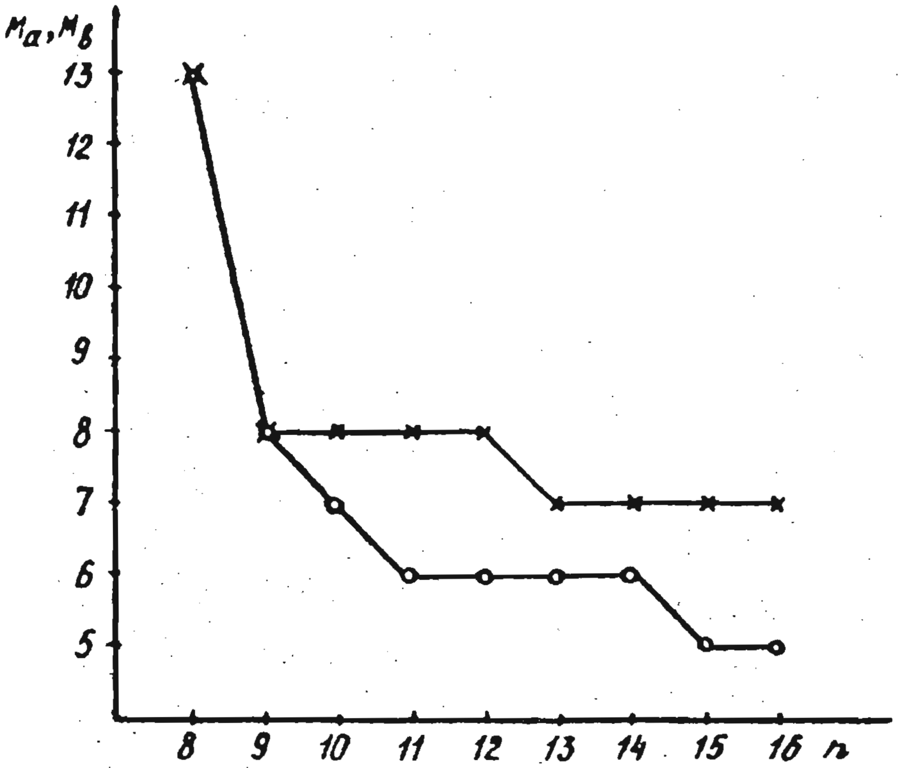

Рис.I. Зависимости разрядностей дробной части коэффициентов a_{1k}, a_{2k} и b_k от n (Условные обозначения: $\circ - M_a$, $\times - M_b$).

для коэффициентов a_{1k}, a_{2k}. Увеличение n вплоть до 20 не приводит к дальнейшему уменьшению разрядности M_a, что согласуется с выводом, сделанным в [I], о существовании некоторой минимальной разрядности коэффициентов при бо́льших n.

На рис.2 представлена зависимость σ_1^2/σ_2^2 от n. Значения σ_1^2/σ_2^2 даны в децибеллах с точностью до постоянного слагаемого $10\lg\sigma_0^2$ (см. (5) и (6)). Такое поведение зависимости σ_1^2/σ_2^2 от n может быть объяснено из рассмотрения карты полюсов $H(z)$ представленной на рис.3 для различных n. На этом рисунке для

Рис.2. Отношение шум/сигнал на выходе цифрового фильтра в зависимости от n. (Значения σ_1^2/σ_2^2 [дБ] приведены с точностью до постоянного слагаемого $10\lg\sigma_0^2$.)

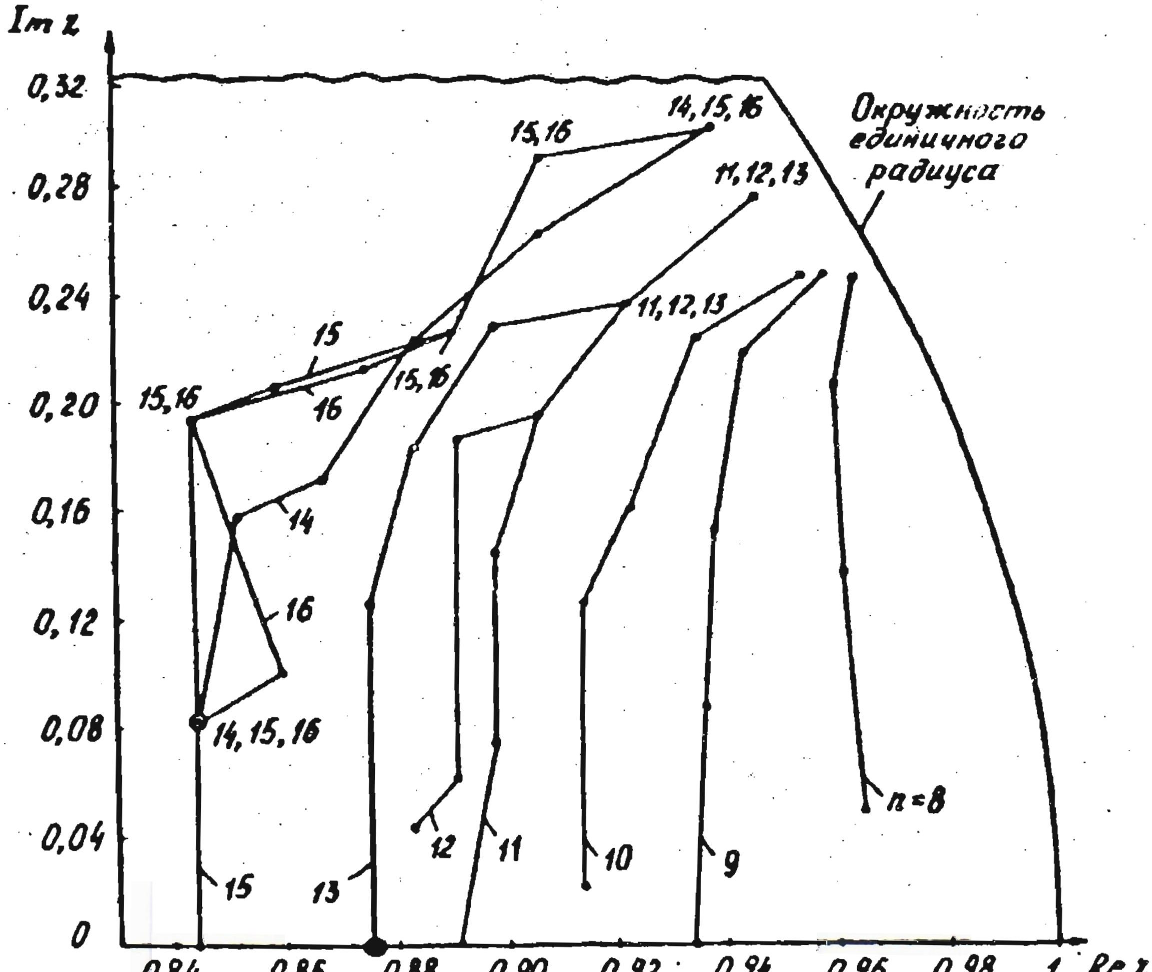

Рис.3. Карта полюсов цифровых фильтров. (Условные обозначения: • – простой полюс; ⊙ – полюс кратности два; ◎ – полюс кратности три.)

комплексно-сопряженных полюсов показаны только комплексные полюсы с положительной мнимой частью. При расчете ЦФ с $n>n_{min}$ можно значительно уменьшить исходную неравномерность АЧХ в полосе пропускания, что приведет к снижению добротности полюсов [7] и смещению их от окружности единичного радиуса на z-плоскости [4]. Последний факт иллюстрируется рис.3.

Хорошо известно [4], что при удалении полюсов от окружности единичного радиуса при $n=const$ результирующий уровень шума округления на выходе ЦФ уменьшается. Таким образом, по мере увеличения n, с одной стороны, увеличивается число источников шума округления, с другой стороны, уменьшается вклад в результирующую дисперсию шума от отдельных источников. Снижение σ_1^2/σ_2^2 при увеличении n объясняется компенсацией шума округления от дополнительных источников смещением полюсов от окружности единичного радиуса и, наоборот, увеличение σ_1^2/σ_2^2 означает, что такой компенсации не происходит. Этими двумя возможными ситуациями объясняются "скачки" в зависимости на рис.2. Как следует из рисунка, для всех $n>8$ величины σ_1^2/σ_2^2 меньше, чем для $n=8$. При этом разница для $n=8$ и $n>8$ достигает 3 - 16 дБ. Поэтому, чтобы сохранить отношение шум/сигнал при $n=8$, таким же, как и при $n>8$, необходимо увеличить длину регистров для хранения промежуточных данных в ЦФ на 1 - 3 бит.

Итак, с увеличением n при фиксированных требованиях к АЧХ наряду с уменьшением разрядности коэффициентов улучшаются и шумовые свойства ЦФ. Иными словами, эффекты конечной разрядности в ЦФ с $n>n_{min}$ проявляются слабее, чем с $n=n_{min}$. По-видимому, этот вывод может быть распространен на цифровые фильтры с другими параметрами АЧХ.

Подход к снижению эффектов конечной разрядности за счет увеличения порядка передаточной функции при оптимальном квантовании коэффициентов и надлежащем упорядочении звеньев наряду с выбором оптимальной структуры ЦФ дает дополнительную степень свободы для проектирования ЦФ с заданными требованиями по аппаратурным затратам, быстродействию и уровню шума округления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. DEHNER G. - AEÜ, 1975, B. 29, N 4, S. 165.
2. РАБИНЕР Л.Р., ГОУЛД Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. - М.: Мир, 1978.
3. CROCHIERE R.E. - IEEE trans., ASSP-22, 1975, N 3, p. 190.
4. ЛАННЭ А.А., ШЕВКОПЛЯС Г.Б. Шумы и точность реализации характеристик цифровых фильтров. - Зарубежная радиоэлектроника, 1974, № 4, с. 18.
5. ПЕЛЕД А., ЛИУ Б. Цифровая обработка сигналов. - Киев: Вища школа, 1979.
6. МИНГАЗИН А.Т., БЫСТРОВ А.Н. Расчет результирующей дисперсии шума округления на выходе каскадных цифровых фильтров. - Микроэлектронные радиотехнические устройства обработки информации и техника СВЧ. - М.: МИЭТ, 1981, с. 35.
7. Синтез активных RC-цепей./Под ред. А.А.ЛАННЭ. - М.: Связь, 1975.