DSPA, 2018, Т.1, март, с. 208-213

ШУМ, ДЛИНА СЛОВА КОЭФФИЦИЕНТОВ И ПОРЯДОК БИХ-ФИЛЬТРОВ

к.т.н. Мингазин А.Т.

РАДИС Лтд, Москва, Зеленоград, E-mail: ***alexmin@radis.ru***

Для БИХ-фильтров нижних частот проведен анализ зависимостей выходного отношения Ш/С и длины слова коэффициентов от порядка фильтров. Сравниваются две каскадные структуры на звеньях прямой и оптимальной формы и две структуры на основе фазовых цепей на звеньях прямой и волновой формы. Полагается, что структуры фильтров оперируют с фиксированной точкой. Длина слова коэффициентов минимизируется с помощью однопараметрического алгоритма вариации исходных параметров. Для каскадных фильтров отношение Ш/С минимизируется с помощью встроенной в этот алгоритм процедуры эвристической расстановки звеньев.

DSPA, 2018, V.1, March, pp.208-213

NOISE, COEFFICIENT WORDLENGTH AND ORDER OF IIR FILTERS

Ph.D. Mingazin A.T.

RADIS Ltd, Russia, Moscow, Zelenograd

The comparative analysis of the output roundoff noise-signal ratio and coefficient wordlength dependences from the filter order for fixed-point low-pass IIR filters is presented. Two cascade filter structures on the direct and optimal form sections and two filter structures based on all-pass networks on the direct and wave form sections are discussed. An one-parameter algorithm based on variation of initial parameters leads to the minimum coefficient wordlength. A heuristic section allocation procedure built-in this algorithm minimizes the noise-signal ratio for the cascade filters.

Введение. Публикации [1-3] посвящены сравнительному анализу структур БИХ-фильтров в условиях конечной арифметики. В [1] сравниваются уровни усиления шума округления фазовых звеньев волновой и прямой формы, звеньев Митры-Хирано, а также уровни усиления шума и длина слова коэффициентов фильтров нижних частот на основе этих звеньев. Анализу уровней усиления шума каскадных фильтров нижних частот с непрерывными коэффициентами на звеньях прямой, канонической и оптимальной формы посвящена работа [2], где также сопоставлены простые правила и оптимальный метод полюсно-нулевой расстановки для минимизации этих уровней. В [3] проводится анализ полосовых фильтров применительно к двум каскадным структурам на звеньях прямой и оптимальной формы, а также к двум структурам на основе фазовых цепей на звеньях прямой и волновой (на базе адаптеров из [4]) формы по ряду параметров шума, границе предельного цикла и длине слова коэффициентов. Для минимизации длины слова коэффициентов используется однопараметрический алгоритм вариации исходных параметров (ВИП), а для минимизации выходного отношения Ш/С в каскадных фильтрах применена встроенная в этот алгоритм процедура [5], генерирующая пять эвристических расстановок звеньев с одинаковым формированием полюсно-нулевых пар. Эта процедура приводит к оптимальным результатам, в частности полученным в [2], или очень близким к таковым.

В данной работе продолжены исследования четырех названных структур БИХ-фильтров, с применением тех же методов, что и в [3]. Сравнительный анализ сосредоточен на исследовании зависимостей отношения Ш/С и длины слова коэффициентов от порядка фильтров нижних частот. Как и в [1-3] предполагается оперирование всех структур с фиксированной точкой.

Описание четырех структур БИХ-фильтров. Представим передаточные функции звеньев на базе которых строятся обсуждаемые структуры фильтров. Индексацию коэффициентов, обозначающую номер звена в структуре, опустим.

Каскадные фильтры нижних частот состоят из звеньев не выше второго. Передаточные функции звеньев второго порядка прямой и оптимальной формы имеют вид

$$H_i(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad \text{и} \quad H_i(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + d\,,$$

где **A, B и C -** матрицы 2×2, 2×1 и 1×2, соответственно, **I -** единичная матрица 2×2. Будем обозначать каскадные фильтры на звенья прямой и оптимальной формы как КПФ и КОФ.

Фильтры нижних частот на основе параллельного соединения двух фазовых цепей могут быть только нечетного порядка. Каждая цепь - это каскад звеньев не выше второго порядка. Передаточные функции фазовых звеньев второго порядка прямой и волновой формы имеют вид

$$P_i(z) = \frac{a_2 + a_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \text{ и } P_i(z) = \frac{-\gamma_1 + \gamma_2(\gamma_1 - 1) z^{-1} + z^{-2}}{1 + \gamma_2(\gamma_1 - 1) z^{-1} - \gamma_1 z^{-2}}.$$

Положим, что для обсуждаемых фильтров используется L_∞=1 – масштабирование, масштабные множители учитываются в коэффициентах представленных передаточных функций. В фильтрах на основе фазовых цепей это обеспечивается автоматически. Однако для уменьшения шума в фильтрах на волновых звеньях из [4] применим L_∞ - масштабирование внутри этих звеньев с помощью множителей равных степени два (см. [1,3]). Будем обозначать фильтры на основе фазовых цепей на звеньях прямой и волновой формы как ФПФ и ФВФ.

Длина слова коэффициентов и отношение Ш/С. Дадим два определения, которые потребуются для дальнейшего изложения.

Под длиной слова коэффициентов фильтра будем понимать величину $M = -\log_2 q$, где q - шаг квантования коэффициентов равный степени два.

Как и в [3] используем вероятностную модель округления чисел, ограниченных единицей. Положим, что округление выполняется в каждом звене после суммирования и гармонический входной сигнал имеет единичную амплитуду. В этом случае отношение шум округления / сигнал на выходе фильтра равно

$$\text{Ш/С} = 10\lg\frac{2GV^2}{3|H(z)|^2_{\max}} - 6B = 10\lg R - 6B,$$

где $H(z)$ - передаточная функция фильтра, G – усиление мощности шума округления, V=1 при $V_{\max}\leq 1$ и $V=V_{\max}$ при $V_{\max}>1$, $V_{\max}$-максимум из всех максимумов модулей промежуточных передаточных функций (в том числе $|H(z)|_{\max}$), подвергнутых масштабированию, B – длина слова переменных с учетом знака, сохраняемая после округления.

Поясним введение параметра V. Для фильтров на основе фазовых цепей всегда V=1. В каскадных структурах, особенно при грубом шаге квантования коэффициентов, максимумы модулей промежуточных передаточных функций, могут превысить единицу. В этом случае $V=V_{\max}$. На практике это означает, что входной сигнал фильтра должен быть ограничен величиной $1/V_{\max}$. В дальнейшем будем называть отношением Ш/С величину Ш/С$+6B$, т.е. параметр $10\lg R$.

Сравнение структур. Зададимся следующими требования к АЧХ фильтра нижних частот: f_{1n}=0,04, f_{2n}=0,08, $\Delta a_{\max}$=1дБ, $a_{0\min}$=80дБ. В этом перечне параметров даны две номинальные граничные частоты, а также предельно допустимые неравномерность и минимальное ослабление, соответственно в полосе пропускания и задерживания. Частота дискретизации равна единице.

Данным требованиям удовлетворяет фильтр Золотарева-Кауэра минимального порядка N=6 и с ослаблением $a_0=a_{0\max}\approx 87$ дБ. С ростом N при фиксированных остальных требованиях к фильтру ослабление будет расти. С другой стороны, каждому значению $N\geq 6$ при $a_0=a_{0\min}$=80дБ соответствует свое значение $\Delta a_{\min}$, уменьшающееся с ростом N, так, например, при N=6 и N=15 имеем $\Delta a_{\min}\approx$0,183дБ и $\Delta a_{\min}\approx$2,6e-17дБ.

На рисунках 1а, б для каскадных структур при $\Delta a=\Delta a_{\max}$ и $\Delta a=\Delta a_{\min}$ представлены три варианта зависимостей отношения Ш/С от N, а именно для упрощенных расстановок звеньев - в порядке уменьшения (кривая 1) и увеличения (кривая 2) полюсных радиусов звеньев, а также для упомянутой выше эвристической расстановки, лучшей из пяти возможных (кривая 3). Полюснонулевое объединение для всех кривых соответствует хорошо известному правилу ближайших полюсов и нулей [2,3,5].

При $\Delta a = \Delta a_{\max}$ с ростом N наблюдается увеличение отношения Ш/С, причем степень увеличения существенно меньше для эвристической расстановки звеньев в сравнении с двумя другими (≈10 дБ против ≈30-35 дБ при изменении N от 6 до 15).

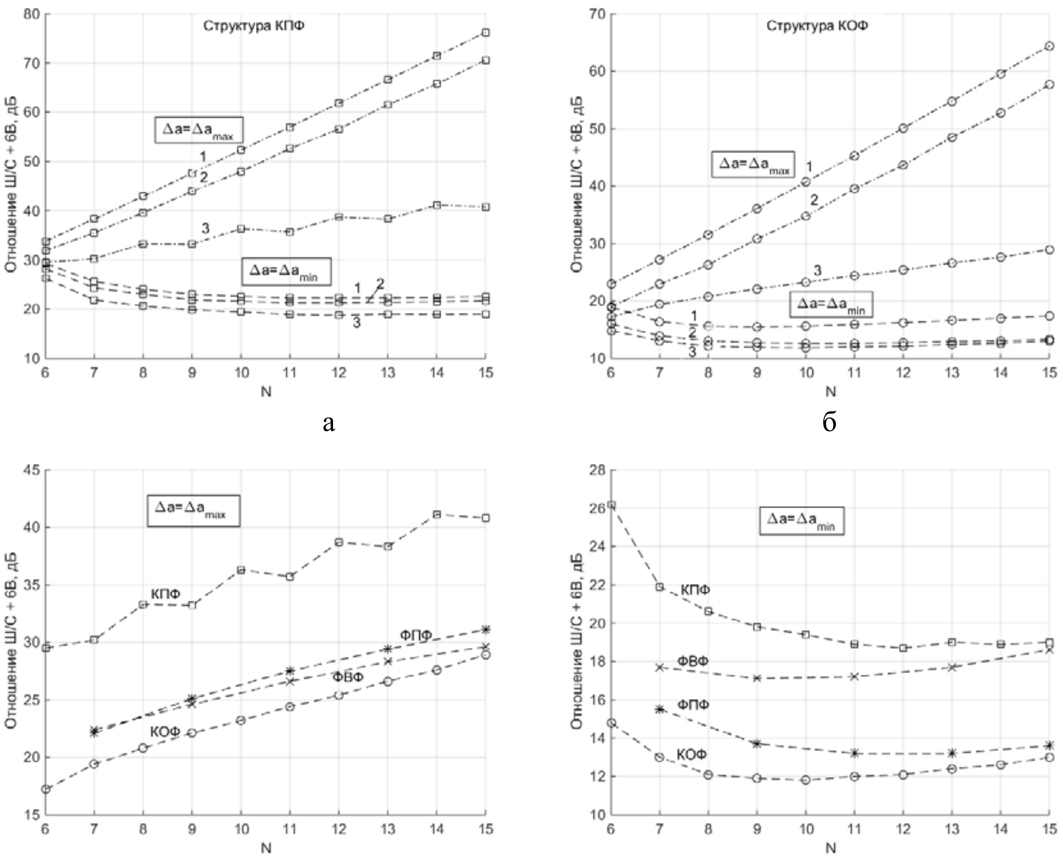
При $\Delta a = \Delta a_{\min}$ с ростом N наблюдается уменьшение отношения Ш/С*,* правда в самом начале кривых и всего на несколько децибел, а затем - несущественное увеличение. В этом случае кривые 1-3 очень близки.

Подъем кривых на рисунках 1а, б объясняется ростом количества источников шума и их уровней, а спад – компенсацией этого роста снижением шума от каждого источника.

Как показывают дополнительные расчеты для граничных частот f_{1n}=0,01, 0,25 и 0,49 при сохранении отношения $\mathrm{tg}(\pi f_{2n})/\mathrm{tg}(\pi f_{1n})$=2,03244, соответствующего f_{1n} =0,04 и f_{2n}=0,08, степень различия кривых 1-3 примерно сохраняется, причем как при $\Delta a = \Delta a_{\min}$, так и при $\Delta a = \Delta a_{\max}$.

Для удобства сравнения на рисунках 1в, г даны зависимости отношения Ш/С от N для всех четырех структур при $\Delta a = \Delta a_{\max}$ и $\Delta a = \Delta a_{\min}$. Для каскадных структур эти зависимости перенесены с рисунков 1а, б и соответствуют кривым 3. Как видим наилучший результат дает структура КОФ, а наихудший – структура КПФ.

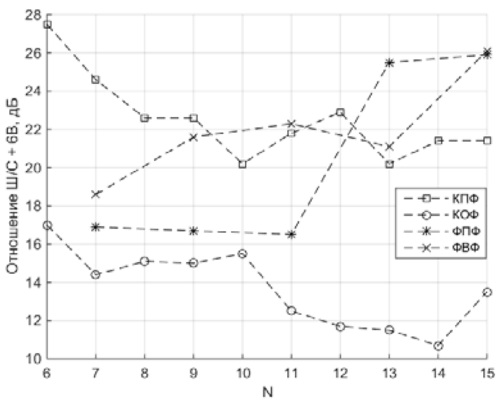
Зависимости отношения Ш/С от N для квантованных коэффициентов показаны на рисунке 2а. Здесь каждому значению N соответствует длина слова коэффициентов М, полученная алгоритмом ВИП, в котором исходный параметр Δa варьируется от $\Delta a_{\min}$ до $\Delta a_{\max}$. Для каскадных фильтров в этот алгоритм, как было отмечено выше, встроена процедура эвристической расстановки звеньев. Во многих случаях использование этой процедуры вместо двух упрощенных расстановок позволяет найти решения с меньшей (на 1- 2 бита) длиной слова коэффициентов.

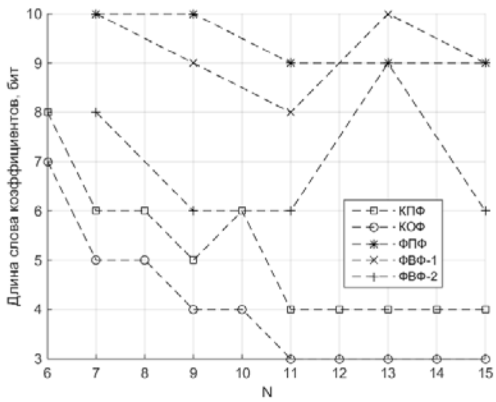


а б

в г

Рисунок 1. Зависимости отношения Ш/С от порядка фильтра для структур а) КПФ, б) КОФ, в) и г) КПФ, КОФ, ФПФ, ФВФ. Кривые 1 и 2 соответствуют расстановке звеньев в порядке уменьшения и увеличения полюсных радиусов, а кривая 3 - эвристической расстановке.





а б

Рисунок 2. Зависимости отношения Ш/С при квантованных коэффициентах (а) и длины слова коэффициентов (б) от порядка фильтров для четырех структур

Зависимости длины слова коэффициентов от N показаны на рисунке 2б. Для структуры на основе фазовых цепей даны две кривые соответствующие обычному (обозначение ФВФ-1) и модифицированному [3] (ФВФ-2) представлению квантованных коэффициентов. Как следует из рисунка 2б наибольшее снижение длины слова коэффициентов за счет увеличения N характерно каскадным структурам. Согласно рисункам 2а, б наилучшие результаты для всех значений N свойственны наиболее сложной структуре КОФ.

Детальное сравнение двух решений. Сопоставим два решения для структуры КОФ при N=6 и N=11. В первом случае имеем три звена второго порядка, количество умножителей - 9×3=27 и сумматоров - 6×3=18. Во втором - одно звено первого порядка и пять - второго, поэтому количество умножителей - 9×5+4=49 и сумматоров - 9×6+2=56, что на много больше чем в первом случае, т.е. структура при N=6 много проще чем при N=11.

Теперь оценим сложность структур КОФ с учетом найденных квантованных коэффициентов. Из рассмотрения кривой для КОФ на рисунке 2а следует, что если длина слова переменных при N=6 равна B бит, то при N=11 она может быть равна B-1 бит, из-за меньшего на ≈5дБ отношения Ш/С. Согласно рисунку 2б при N=6 длина слова коэффициентов с учетом знака равна M+1=7+1=8, а при N=11 - равна M+1=3+1=4, что сильно упрощает умножители и сумматоры.

В таблицах 1 и 2 представлены квантованные коэффициенты и оценки сложности структуры КОФ при N=6 и N=11для реализаций на умножителях и с заменой их на сумматоры и элементы сдвига. В этих таблицах $k^{\times}$ - количество нетривиальных умножителей, а k^{+} - количество структурных сумматоров в звене. Тривиальный умножитель – элемент сдвига.

Таблица 1.

Коэффициенты структуры КОФ при N=6 и количество элементов в ее реализации

Звено	**A**		**B**	**C**^{t}	d	$k^{\times}$	k^{+}
1	0,9375 0,171875	0,1953125 0,9375	1/128 0,09375	0,9765625 0,0703125	0,0390625	8	
2	0,9296875 -0,0390625	0,1171875 0,9296875	1/128 0,15625	0,9609375 0,0546875	1/128	7	6
3	0,953125 -0,2578125	0,234375 0,953125	1/64 0,1796875	0,953125 0,1015625	0,203125	8	
Количество элементов: нетривиальные умножители {≤ 8бит×B бит}: 23 структурные сумматоры {≤ B+7 бит}: 18 сумматоры {≤ B+7 бит}, заменяющие умножители: 26 общее число сумматоров {≤ B+7 бит}: 44 регистры {B бит}: 6							

Таблица 2.

Коэффициенты структуры КОФ при N=11
и количество элементов в ее реализации

Звено	**A**	**B**	$\mathbf{C}^t$	d	$k^{\times}$	k^{+}
1	0,75 0 0 0	1/4 0	0,875 0	1/8	2	2
2	0,875 1/4 -0,375 0,875	0 1/4	1 0	1/2	3	4
3	0,75 0,375 -1/8 0,75	0 1/4	0,875 1/8	1/8	4	5
4	0,875 1/4 -1/4 0,875	0 1/4	1 0	1/8	2	4
5	0,75 1/4 0 0,75	0 1/4	0,75 0	0	3	2
6	0,875 1/4 -0,375 0,875	0 1/2	0,75 0	1/2	4	4
Количество элементов: нетривиальные умножители {≤ 4бит×(B-1) бит}: 18 структурные сумматоры {≤ B-1+3 бит}: 21 сумматоры {≤B-1+3 бит}, заменяющие умножители: 17 общее число сумматоров {≤ B-1+3 бит}: 38 регистры {B-1 бит}: 11						

Для первой реализации общее количество нетривиальных умножителей и структурных сумматоров при N=6 равно 23 и 18, соответственно, а при N=11 эти значения равны 18 и 21. Для второй реализации общее количество сумматоров (структурные + сумматоры, заменяющие все умножители) равно 44 и 38, соответственно при N=6 и N=11. Таким образом, с учетом длин слов, указанных в фигурных скобках в таблицах 1 и 2, обе реализации при N=11 оказываются проще, чем при N=6, хотя содержат большее число регистров (элементов задержки). Интересно отметить, что значения неравномерности ХГВЗ в полосе пропускания обсуждаемых фильтров при N=6 и N=11 соответственно равны 57,6 и 14,4 отсчетам частоты дискретизации.

Заключение. Рассмотрены четыре структуры БИХ-фильтров: две каскадные на звеньях прямой и оптимальной формы и две на основе фазовых цепей на звеньях прямой и волновой формы. Анализ представленных зависимостей выходного отношения Ш/С и длины слова коэффициентов от порядка этих фильтров показывает, что, преднамеренно увеличивая порядок, можно уменьшить длину слова коэффициентов и при этом сильно не ухудшить или даже несколько улучшить отношение Ш/С. Наибольший эффект достигается для обеих каскадных структур, которым свойственна меньшая длина слова коэффициентов в сравнении с двумя другими. В зависимости от структуры и порядка N отношение Ш/С меняется в диапазоне ≈17 дБ, а длина слва коэффициентов - в диапзоне от 3 до 10 бит. Наилучшие результаты по этим параметрам дает каскадная структура на звеньях оптимальной формы, причем для всех рассмотренных значений N=6, …, 15. Дополнительные исследования для граничных частот 0,01 или 0,49 подтверждают этот факт, но для частоты 0,25 преимуществом по отношению Ш/С обладают структуры на звеньях прямой формы и в большей степени - структура на основе фазовых цепей. Преимущество каскадных структур по длине слова коэффициентов утрачивается с требованием очень малой неравномерности АЧХ. Представляется, что для каскадных структур с граничными частотами в окрестности 0,5 и для структур на основе фазовых цепей с граничными частотами во всей основной полосе нет смысла увеличивать порядок фильтров более чем на 2.

Литература

1. Renfors M., Zigouris E. Signal processor implementation of digital all-pass filters. // IEEE Trans. 1988. ASSP-36. No.5. P. 714-728.
2. Dehner G.F. Noise optimized IIR digital filter design - tutorial and some new aspects. // Signal Processing. 2003. Vol. 83. No. 8. P. 1565-1582.
3. Мингазин А. Альтернативы синтеза БИХ-фильтров. // Компоненты и технологии. 2017. № 6. С.106-116.
4. Gazsi L. Explicit formulas for lattice wave digital filters. // IEEE Trans. 1985. CAS-32. No.1. P. 68-88.
5. Мингазин А.Т., Зорич А.А. Минимизация шума округления каскадных рекурсивных цифровых фильтров. // Электронная техника. 1992. Сер. 10. № 1,2. С. 37-43.