

Альтернативы синтеза БИХ-фильтров: дополнительные результаты

Александр МИНГАЗИН
alexmin@radis.ru

В статье рассмотрены четыре варианта синтеза БИХ-фильтров с заданными требованиями к АЧХ. Этим вариантам соответствуют две каскадные структуры и две структуры на основе фазовых цепей. Предполагается, что все фильтры оперируют в дополнительном коде с фиксированной точкой. Синтез включает минимизацию длины слова коэффициентов фильтра, а для каскадных структур — и минимизацию отношения шум/сигнал. Ранее опубликованные зависимости ряда параметров шума квантования, границы предельного цикла квантования и длины слова коэффициентов от номинальной граничной частоты для полосовых фильтров дополнены подобными зависимостями для режекторных фильтров, а также для фильтров нижних и верхних частот.

Введение

В [1] для широкого диапазона граничных частот рассмотрены четыре варианта синтеза полосовых БИХ-фильтров, которым соответствуют две каскадные структуры на звеньях прямой и оптимальной формы, а также две структуры на основе фазовых цепей на звеньях прямой и волновой формы. Предполагается, что все структуры оперируют в дополнительном коде с фиксированной точкой. Для минимизации длины слова коэффициентов используется однопараметрический алгоритм вариации исходных параметров (ВИП), а для минимизации отношения шум/сигнал в каскадных фильтрах применена эвристическая процедура полюсно-нулевого упорядочения. Проводится анализ всех структур фильтров по усилению мощности, максимуму спектральной плотности мощности и постоянной составляющей шума квантования, границе предельного цикла квантования и длине слова коэффициентов. В данной статье исследования, выполненные в [1], продолжены для режекторных фильтров, а также для фильтров нижних и верхних частот.

Прежде чем представить новые результаты, напомним задачу синтеза БИХ-фильтров и подход к ее решению. Кроме того, кратко опишем обсуждаемые структуры фильтров и приведем соотношения для оценки контролируемых параметров фильтров. Все это достаточно подробно изложено в [1], где также показаны схемы звеньев структур.

Задача синтеза БИХ-фильтров и ее решение

Задача синтеза БИХ-фильтров со стандартными требованиями к АЧХ формулируется как

$$M \rightarrow \min, \text{ шум/сигнал} \rightarrow \min \\ \text{при условиях } \Delta \hat{a} \leq \Delta a_{\max}, \hat{a}_0 \geq a_{0\min},$$

где M — длина слова дробной части коэффициентов в битах, которой соответствует шаг квантования $q = 2^{-M}$; $\Delta \hat{a}$ и \hat{a}_0 — выраженные в децибелах неравномерность и минимальное ослабление АЧХ фильтра в номинальных полосах пропускания и задерживания, а Δa_{\max} и $a_{0\min}$ — заданные предельно допустимые значения этих параметров. Номинальные полосы определяются по заданным номинальным граничным частотам f_{in} . Для фильтров нижних и верхних частот $i = 1, 2$, а для полосовых

и режекторных фильтров $i = 1-4$. При этом $f_{1n} < f_{2n} < f_{3n} < f_{4n} < f_r/2$, где f_r — частота дискретизации, далее принята равной единице.

Согласно сформулированной задаче требуется синтезировать фильтр конкретной структуры с заданными допусками на АЧХ. При этом необходимо получить минимальную длину слова коэффициентов, а для каскадной структуры — и минимальное отношение шум/сигнал на выходе фильтра. Кроме того, в любой промежуточной точке, относительно которой выполняется масштабирование в фильтре, L_∞ -норма должна быть близка к значению, равному единице. Очевидно, что полюсы синтезированного фильтра должны находиться внутри единичной окружности на z -плоскости.

Минимизация длины слова коэффициентов выполняется с помощью однопараметрического алгоритма ВИП применительно к фильтрам Золотарева — Кауэра. Варьируемым параметром в нем является исходная неравномерность АЧХ в полосе пропускания Δa , а исходные граничные частоты фиксированы и равны номинальным значениям $f_i = f_{in}$. Диапазон вариации устанавливается в пределах $\Delta a_{\min} \leq \Delta a \leq \Delta a_{\max}$. Вариация Δa проводится для каждого значения длины слова коэффициентов $M = 1, 2, \dots$ до тех пор, пока для некоторых Δa и M не будет найдено допустимое решение с неравномерностью не более Δa_{\max} и ослаблением не менее $a_{0\min}$. В случае синтеза каскадных фильтров в процессе вариации Δa реализуется эвристическая процедура полюсно-нулевого упорядочения для получения допустимого решения с минимальным отношением шум/сигнал.

Описание четырех структур БИХ-фильтров

Все рассматриваемые структуры фильтров содержат звенья не выше второго порядка, передаточные функции которых выражаются через вещественные коэффициенты. Количество звеньев зависит от порядка фильтра. Как и в [1], номерной индекс у коэффициентов звена указывать не будем.

Передаточная функция каскадного фильтра

$$H(z) = \prod_{i=1}^N H_i(z).$$

Фильтр может быть реализован на звеньях прямой или оптимальной формы.

Передаточная функция звена прямой формы

$$H_i(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Передаточная функция звена оптимальной формы

$$H_i(z) = C(zI - A)^{-1}B + d,$$

где $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$, $C = [c_{11} \ c_{12}]$,

I — единичная матрица размерностью 2×2 .

Передаточная функция фильтра на основе фазовых цепей

$$H(z) = 0,5 \left[\prod_{i=1,3,\dots} P_i(z) \pm \prod_{i=2,4,\dots} P_i(z) \right].$$

Фильтры на основе фазовых цепей часто называют фильтрами в виде суммы двух фазовых цепей. Каждая цепь может быть реализована каскадным соединением фазовых звеньев прямой или волновой формы.

Передаточная функция фазового звена прямой формы

$$P_i(z) = \frac{a_2 + a_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$

Передаточная функция фазового звена волновой формы

$$P_i(z) = \frac{-\gamma_1 + \gamma_2(\gamma_1 - 1)z^{-1} + z^{-2}}{1 + \gamma_2(\gamma_1 - 1)z^{-1} - \gamma_1 z^{-2}}$$

Это звено можно реализовать на двух адаптерах, конфигурация и коэффициенты которых связаны с коэффициентами $P_i(z)$. Для улучшения шумовых свойств звеньев в адаптеры вводятся масштабные множители 2^k и 2^{-k} . Значения k для отдельных звеньев фильтра могут различаться.

Фильтры на основе четырех обсуждаемых структур будем обозначать как:

- КПФ — каскад звеньев прямой формы;
- КОФ — каскад звеньев оптимальной формы;
- ФПФ — сумма двух фазовых цепей на звеньях прямой формы;
- ФВФ — сумма двух фазовых цепей на звеньях волновой формы.

Оценки параметров шума и границы предельного цикла

Полагается, что фильтр оперирует переменными с фиксированной точкой в дополнительном коде и ограниченными по модулю единицей. Под квантованием понимается округление или усечение переменных в фильтре после сумматоров.

В представленных ниже соотношениях, связанных с квантованием переменных,

передаточные функции $G_i(z)$ соответствуют импульсным характеристикам $g_i(n)$, которые определены от i -й точки или иначе от i -го источника квантования переменных в фильтре до его выхода.

Усиление мощности шума

$$K_p = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \sum_i \|G_i\|_2^2,$$

где σ^2 — мощность шума на выходе фильтра, обусловленная всеми источниками квантования переменных внутри фильтра; $\sigma_0^2 = 2^{-2B}/3$ — мощность шума каждого источника; B — длина слова переменных, включая знак, сохраняемая после квантования.

Усиление постоянной составляющей (ПС) шума

$$K_C = \frac{C_G}{m_0} = \left| \sum_i G_i(z) \right|_{z=1}, \quad m_0 \neq 0,$$

где C_G — ПС шума на выходе фильтра, обусловленная всеми источниками квантования (усечения) внутри фильтра; $m_0 = 2^{-B}$ — ПС шума каждого источника. В случае округления $m_0 = 0$ и как следствие $C_G = 0$.

Максимум относительной спектральной плотности мощности (ОСПМ) шума на выходе фильтра

$$G'_{\max} = \frac{G_{\max}}{\sigma_0^2} = \max_i \sum_i |G_i(z)|^2.$$

Этот параметр можно трактовать как пиковое усиление мощности шума. Здесь максимум определяется на дискретном ряде частот в основной полосе, исключая полосу задерживания.

Отношение шум/сигнал на выходе фильтра

$$\begin{aligned} \text{шум/сигнал} &= \\ &= 10 \lg(2K_p V^2 / (3|H(z)|_{\max}^2)) - 6B = \\ &= 10 \lg R - 6B, \end{aligned}$$

где $V = 1$ при $V_{\max} \leq 1$ и $V = V_{\max}$ при $V_{\max} > 1$, V_{\max} — максимум из всех максимумов модулей промежуточных передаточных функций (в том числе $|H(z)|_{\max}$), подвергнутых масштабированию. Для рассматриваемых фильтров на основе фазовых цепей всегда $V = 1$. Пояснение введения параметра V дано в [2].

Это выражение соответствует отношению мощностей в децибелах. В процессе поиска минимума этого отношения удобно оперировать величиной R , которая не связана с конкретным значением длины слова B .

Усиление максимальной ошибки квантования, или иначе нормированная граница предельного цикла на выходе фильтра

$$A'_{\max} = \frac{A_{\max}}{\nu} = \sum_{i=0}^{\infty} |g_i(n)|,$$

где ν — максимальная ошибка каждого источника квантования внутри фильтра, при-

чем $\nu = 2^{-B}$ при округлении переменных и $\nu = 2^{-B+1}$ при их усечении.

В представленных соотношениях верхний предел суммирования по i определяется количеством точек, в которых осуществляется квантование переменных в фильтре.

Сравнение альтернатив синтеза режекторных БИХ-фильтров

Зададимся следующими требованиями к режекторным фильтрам:

$$\begin{aligned} \Delta a_{\max} &= 0,5 \text{ дБ}, \quad a_{0\min} = 40 \text{ дБ}, \\ \Delta f &= f_{4n} - f_{1n} = 0,005. \end{aligned}$$

Здесь номинальная граничная частота f_{1n} принимает значения 0,0006; 0,0008; 0,001; 0,002; 0,004; 0,006; 0,008; 0,01; 0,02; 0,04; 0,06; 0,08; 0,1; 0,2 и 0,25, а остальные номинальные граничные частоты соответствуют выполнению равенства

$$\begin{aligned} \Omega_2(\Omega_4 - \Omega_1) / (\Omega_2^2 - \Omega_1 \Omega_4) &= \\ = \Omega_3(\Omega_4 - \Omega_1) / (\Omega_3^2 - \Omega_1 \Omega_4) &= 1,4, \end{aligned}$$

где $\Omega_i = \text{tg}(\pi f_{in} / f_r)$, $i = 1, \dots, 4$.

Данным требованиям, аналогичным используемым в [1], удовлетворяют режекторные фильтры Золотарева — Кауэра с минимальным порядком $N = 10$. В связи с этим, как и в [1], исходная неравномерность Δa в алгоритме ВИП варьируется в диапазоне 0,119486–0,5 дБ для всех значений f_{1n} .

На рис. 1а–е показаны результаты синтеза режекторных фильтров для обсуждаемых структур, а именно зависимости ряда параметров шума, границы предельного цикла и длины слова коэффициентов от номинальной граничной частоты f_{1n} . Сразу отметим, что эти результаты сходны с полученными в [1] для полосовых фильтров.

На рис. 1а–г для структуры ФВФ представлены два варианта кривых: с масштабированием $k_i \geq 0$ и без него $k_i = 0$. Все графики на этих рисунках, кроме рис. 1г, при линейном масштабе по оси абсцисс зеркально симметричны относительно граничной частоты $f_{1n} = 0,25$.

На рис. 1а–в показаны зависимости усиления мощности шума, максимума ОСПМ шума и границы предельного цикла от частоты f_{1n} . Напомним, что значения этих параметров желательно иметь минимальными. Как видим, взаимное расположение кривых от рисунка к рисунку примерно сохраняется. При этом для частот от 0,0006 до 0,02–0,03 преимущество вплоть до десятков децибел обладают структуры КОФ и ФВФ ($k_i > 0$) в сравнении с двумя другими. Для граничных частот вблизи 0,25 преимуществом ≈ 5 –10 дБ в сравнении с остальными обладает структура ФПФ.

На рис. 1г показаны зависимости усиления ПС шума от граничной частоты f_{1n} . Относительное расположение кривых

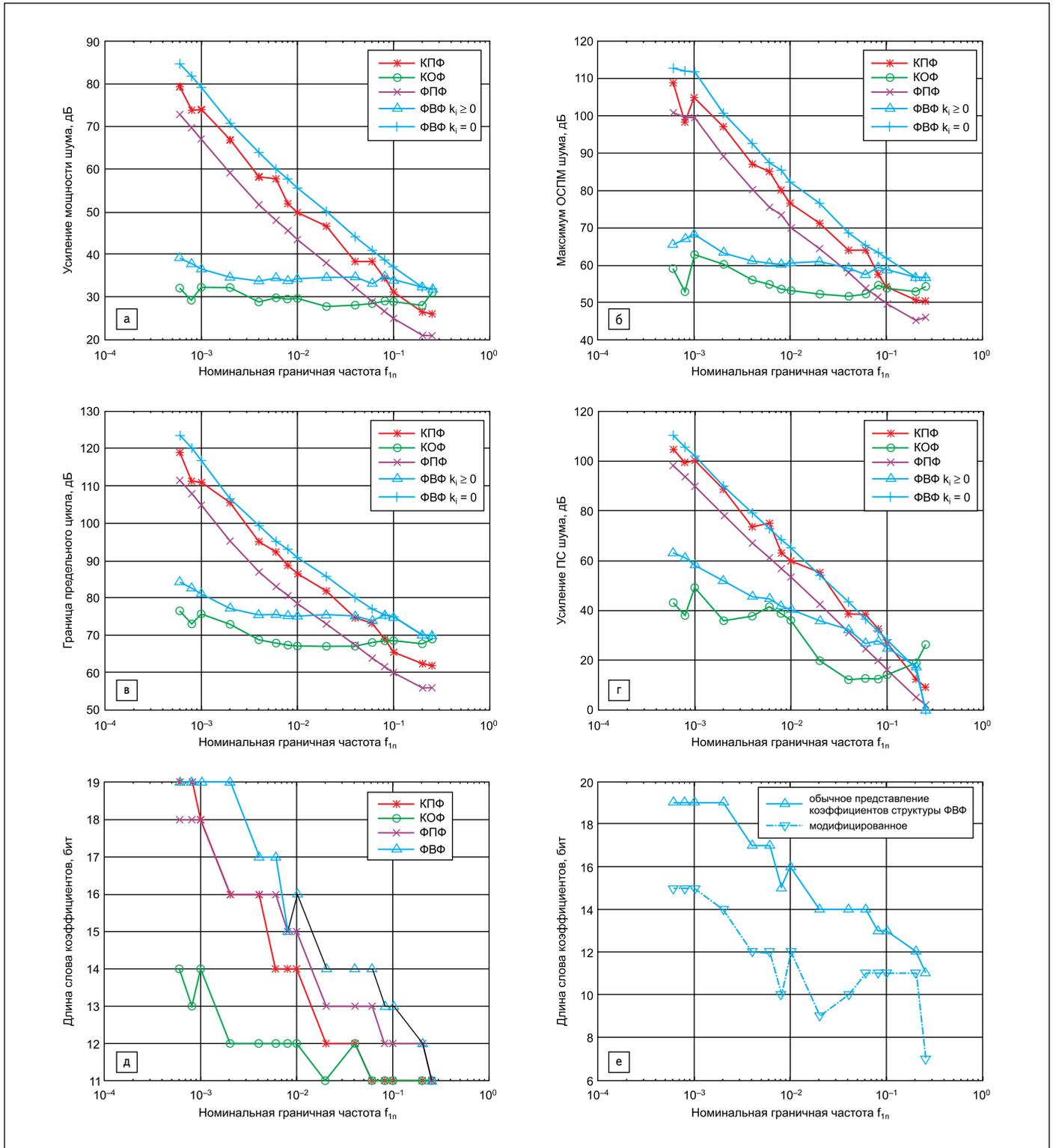


Рис. 1. Зависимости параметров четырех структур режекторных БИХ-фильтров от номинальной граничной частоты f_{1n} : а) усиление мощности шума; б) максимум ОСПМ шума; в) граница предельного цикла; г) усиление ПС шума; д) длина слова коэффициентов; е) длина слова коэффициентов для двух вариантов их представления в структуре ФВФ

отчасти сходно с приведенным на рис. 1а–в. Наименьшим усилением ПС для частот 0,0006–0,02 характеризуются структуры КОФ и ФВФ ($k_i > 0$).

На рис. 1д показаны зависимости длины слова коэффициентов от номинальной граничной частоты f_{1n} . Как видим, увеличение длины слова с уменьшением граничной частоты свойственно всем обсуждаемым структурам фильтров. Для частоты 0,0006 минимальное значение (14 бит) имеет структура КОФ, а максимальное

(18–19 бит) — три другие структуры. Наибольшее отличие в значениях длины слова для рассматриваемого диапазона граничных частот свойственно этим трем структурам и составляет 7–8 бит. Подобное отличие для структуры КОФ составляет 3 бит.

На рис. 1е приведены две зависимости длины слова коэффициентов от граничной частоты f_{1n} для структуры ФВФ. Первая соответствует обычному, а вторая модифицированному представлению коэффициентов [1]. Кривая для обычного представления скопирована

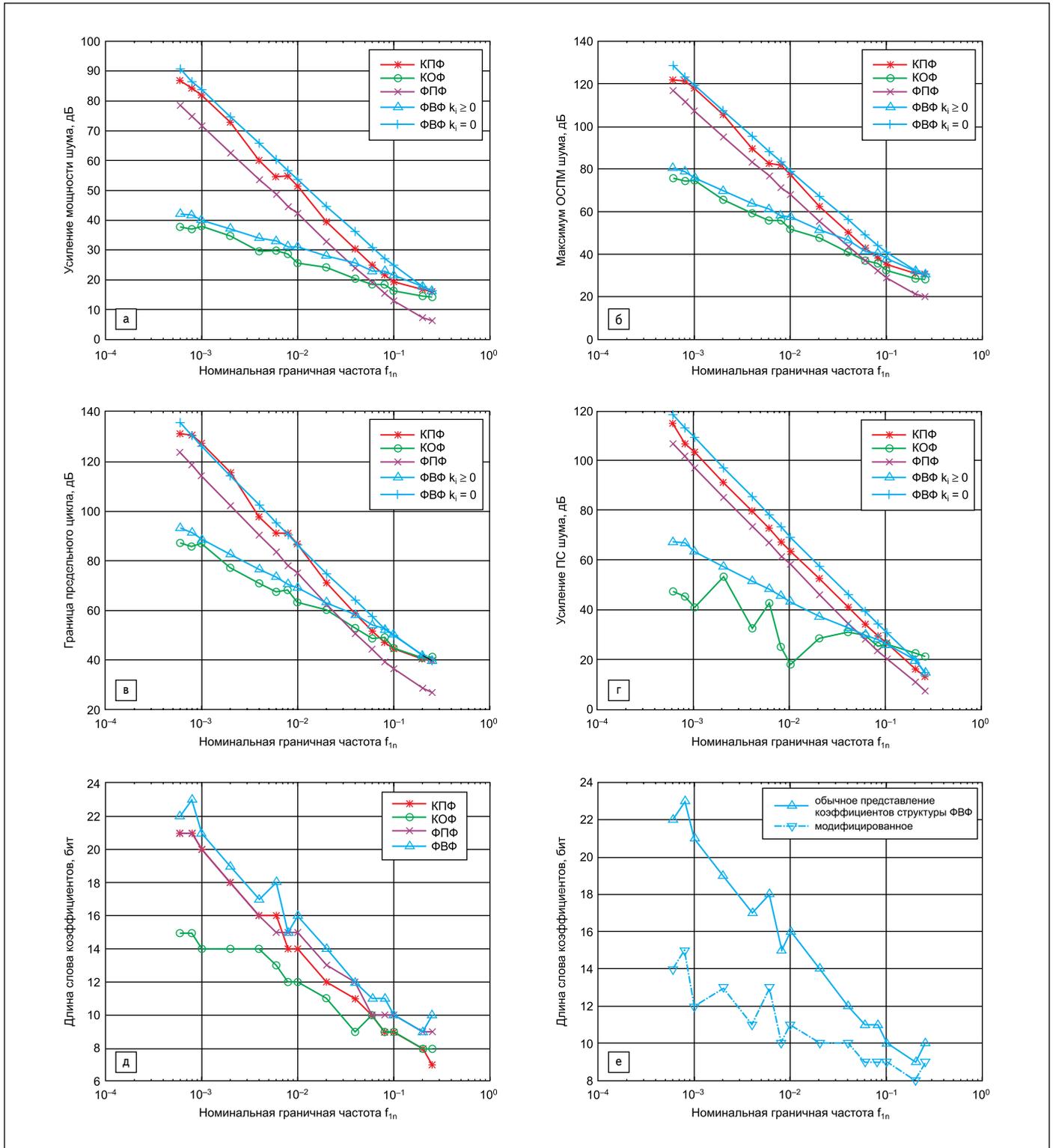


Рис. 2. Зависимости параметров четырех структур БИХ-фильтров нижних частот от номинальной граничной частоты f_{in} : а) усиление мощности шума; б) максимум ОСПМ шума; в) граница предельного цикла; г) усиление ПС шума; д) длина слова коэффициентов; е) длина слова коэффициентов для двух вариантов их представления в структуре ФВФ

с рис. 1д. Как следует из рис. 1е, длина слова при модификации может быть уменьшена на 1–5 бит в зависимости от f_{in} .

В таблице 1 показан разброс значений параметров режекторных фильтров для всех графиков на рис. 1. В таблице 2 аналогичные результаты представлены для эквивалентного полосового фильтра для всех графиков на рис. 9 в [1]. В этих таблицах для структуры ФВФ в скобках указан разброс значений длины слова модифицированных коэффициентов.

Таблица 1. Разброс значений параметров режекторных фильтров для рис. 1

Структура	Усиление шума, дБ	Максимум ОСПМ шума, дБ	Граница предельного цикла, дБ	Усиление ПС шума, дБ	Длина слова коэффициентов, бит
КПФ	26–79,4	50,3–108,8	61,8–119,1	9,1–104,6	11–19
КОФ	27,7–32,3	51,5–62,6	67–76,4	12,1–49,3	11–14
ФПФ	20,8–72,7	45,1–100,6	55,8–111,5	1,9–98,2	11–18
ФВФ	31,7–39,1	56,5–65,5	69,7–84,2	0–63,1	11–19 (7–15)

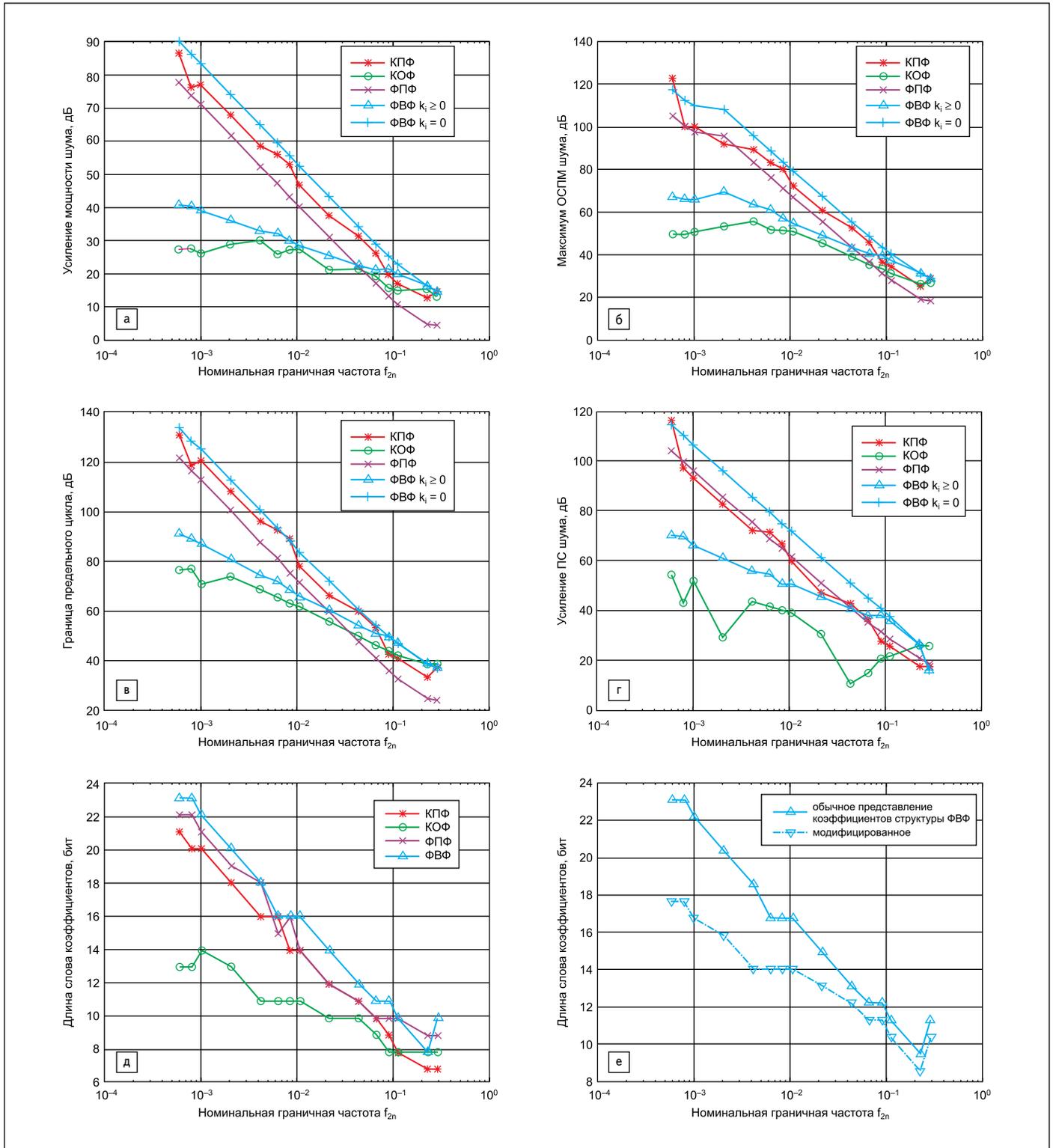


Рис. 3. Зависимости параметров четырех структур БИХ-фильтров верхних частот от номинальной граничной частоты f_{2n} : а) усиление мощности шума; б) максимум ОСПМ шума; в) граница предельного цикла; г) усиление ПС шума; д) длина слова коэффициентов; е) длина слова коэффициентов для двух вариантов их представления в структуре ФВФ

Таблица 2. Разброс значений параметров полосовых фильтров для рис. 9 в [1]

Структура	Усиление шума, дБ	Максимум ОСПМ шума, дБ	Граница предельного цикла, дБ	Усиление ПС шума, дБ	Длина слова коэффициентов, бит
КПФ	27,4–78,9	51,1–113,4	62,5–118,1	–2,9–96,1	10–19
КОФ	28,7–33,6	52,8–68,7	67,4–78,4	0–47,3	11–13
ФПФ	20,6–73,3	44,9–108,9	55,7–112,5	1,8–96,4	11–19
ФВФ	31,1–38	55,7–72,4	69,5–83,9	0–59,9	12–20 (7–14)

Сравнение альтернатив синтеза БИХ-фильтров нижних и верхних частот

Зададимся следующими требованиями к фильтрам нижних и верхних частот:

$$\Delta a_{\max} = 0,1 \text{ дБ}, a_{0\min} = 65 \text{ дБ}.$$

Таблица 3. Разброс значений параметров фильтров нижних частот для рис. 2

Структура	Усиление шума, дБ	Максимум ОСПМ шума, дБ	Граница предельного цикла, дБ	Усиление ПС шума, дБ	Длина слова коэффициентов, бит
КПФ	16–86,7	30,3–122,2	39,8–131,3	13,2–115,1	7–21
КОФ	14,3–38	28,4–75,8	41,1–87,4	18–53,2	8–15
ФПФ	6,2–78,7	19,9–116,8	27,1–123,7	7,4–106,7	9–21
ФВФ	16,1–42,1	30,2–80,6	39,7–93,2	14,6–67,3	10–23 (8–15)

Таблица 4. Разброс значений параметров фильтров верхних частот для рис. 3

Структура	Усиление шума, дБ	Максимум ОСПМ шума, дБ	Граница предельного цикла, дБ	Усиление ПС шума, дБ	Длина слова коэффициентов, бит
КПФ	16–86,7	26,9–122,2	35,8–131,3	1,8–115,1	7–21
КОФ	14,3–31,3	28–56,6	41,1–78,7	–5,9–43,9	8–14
ФПФ	6,2–77,9	19,9–105	27,1–122,3	3,2–100,8	9–22
ФВФ	16,1–41,7	30,2–70,3	39,7–92,4	0,2–62,2	10–23 (9–17)

Номинальные граничные частоты f_{1n} фильтра нижних частот и f_{2n} фильтра верхних частот принимают значения 0,0006–0,25, как и f_{1n} режекторного фильтра, рассмотренного ранее. Соответствующие частоты f_{2n} и f_{1n} фильтров нижних и верхних частот находятся из равенства $\Omega_2/\Omega_1 = 1,18$, где Ω_1 определены выше.

Данным требованиям удовлетворяют фильтры Золотарева — Кауэра с минимальным порядком $N = 9$. При этом исходная неравномерность $\Delta\alpha$ в алгоритме ВИП варьируется в диапазоне 0,02482–0,1 дБ для всех значений номинальных граничных частот.

На рис. 2а–е показаны результаты синтеза фильтров нижних частот для четырех структур в виде зависимостей ряда параметров шума, границы предельного цикла и длины слова коэффициентов от номинальной граничной частоты f_{1n} .

На рис. 3а–е показаны подобные результаты синтеза фильтров верхних частот в виде зависимостей рассматриваемых параметров от номинальной граничной частоты f_{2n} .

Отметим, что все графики на рис. 2, кроме рис. 2г, будут также соответствовать филь-

трам верхних частот с номинальными граничными частотами $f_{2n} = 0,5-f_{1n}$, а все графики на рис. 3, кроме рис. 3г, будут также соответствовать фильтрам нижних частот с номинальными граничными частотами $f_{1n} = 0,5-f_{2n}$.

В таблицах 3 и 4 показан разброс значений параметров фильтров нижних и верхних частот для всех кривых на рис. 2 и 3.

Характер зависимостей на рис. 2 и 3 для фильтров нижних и верхних частот подобен представленным на рис. 1 для режекторных фильтров, но в деталях имеются различия. Например, приближение некоторых кривых к горизонтальной линии, характерное для режекторных и полосовых (на рис. 9 в [1]) фильтров, не свойственно кривым для фильтров нижних и верхних частот. Дополнительные особенности читатель может выявить самостоятельно.

Заключение

Рассмотрены четыре варианта синтеза БИХ-фильтров с заданными требованиями к АЧХ. Этим вариантам соответствуют две каскадные структуры на звеньях прямой

и оптимальной формы, а также две структуры на основе фазовых цепей на звеньях прямой и волновой формы. Полагается, что все структуры оперируют переменными в дополнительном коде с фиксированной точкой. Полученные результаты для режекторных фильтров, а также для фильтров нижних и верхних частот наряду с ранее опубликованными для полосовых фильтров дают разработчику наглядное представление о том, как могут меняться усиление мощности, максимум спектральной плотности мощности и постоянная составляющая шума квантования, а также граница предельного цикла квантования и длина слова коэффициентов фильтров при изменении их структуры, типа АЧХ и номинальных граничных частот. ■

Литература

1. Мингазин А. Альтернативы синтеза БИХ-фильтров // Компоненты и технологии. 2017. № 6.
2. Мингазин А. Т. Шум, длина слова коэффициентов и порядок БИХ-фильтров. 20-я Международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение». DSPA-2018. Т. 1.