

## МИНИМУМ МАКСИМАЛЬНОЙ ВЗВЕШЕННОЙ ОШИБКИ АППРОКСИМАЦИИ АЧХ КЛАССИЧЕСКИХ АНАЛОГОВЫХ И ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

*Мингазин А.Т., в.н.с., к.т.н., РАДИС Лтд, Москва, Зеленоград, e-mail: alexmin@radis.ru.*

### MINIMUM-OF-MAXIMUM WEIGHTED ERROR IN MAGNITUDE RESPONSE APPROXIMATION OF ANALOG AND DIGITAL CLASSICAL FILTERS

*Mingazin A. T.*

*The problem of determination of a minimum-of-maximum weighed error in magnitude response approximation of Zolotarev-Cauer, Chebyshev and Butterworth analog and digital filters is considered. Two expressions for exact and approximate determination of these minimum error in relation to the lowpass and highpass, bandpass and bandstop filters are received.*

**Key words:** magnitude response approximation, minimum-of-maximum weighted error, analog and digital classical filters.

**Ключевые слова:** аппроксимация АЧХ, минимум максимальной взвешенной ошибки, классические аналоговые и цифровые фильтры.

#### Введение

На сайте сети Research Gate был задан вопрос от W. Sinkala, Botswana Int. University. of Science and Technology: «Можно ли минимизировать пульсации в полосах пропускания и задерживания эллиптического фильтра»? Автор данной статьи ответил, что для этого нужно решить алгебраическое уравнение четвертой степени, включающее эллиптические функции, и что оно громоздко. Кроме того, привел числовой пример. Поскольку ответ вызвал интерес у многих специалистов, а в известной автору литературе четкого ответа на поставленный вопрос нет, то в материале, представленном ниже, дан более обобщенный ответ. Показано, что решение проблемы связано с нахождением минимума максимальной взвешенной ошибки аппроксимации АЧХ, и действительно для этого необходимо решить алгебраическое уравнение четвертой степени, которое в свою очередь при определенных условиях обращается в простую приближенную формулу. Полученные соотношения пригодны не только для эллиптических (Золотарева-Кауэра), но и для других классических аналоговых и цифровых фильтров – Чебышева (I и II) и Баттерворта со стандартными типами АЧХ, соответствующими фильтрам нижних и верхних частот, полосовым и режекторным.

#### Параметры АЧХ фильтров

В инженерной практике для описания стандартных типов АЧХ классических аналоговых и цифровых фильтров обычно используют следующие параметры:

- $\Delta a$  – неравномерность АЧХ в полосе пропускания в дБ;
- $a_0$  – минимальное ослабление АЧХ в полосе задерживания в дБ;

*Рассмотрена проблема определения минимума максимальной взвешенной ошибки аппроксимации АЧХ аналоговых и цифровых фильтров Золотарева-Кауэра, Чебышева и Баттерворта. Получены два выражения для точного и приближенного определения минимума ошибки применительно к фильтрам нижних и верхних частот, полосовым и режекторным фильтрам.*

–  $f_k$  – граничные частоты полос пропускания и задерживания,  $k \leq 4$ .

Полагается, что максимум АЧХ нормирован к 0 дБ, а частота дискретизации для цифровых фильтров принята равной единице. Порядок обсуждаемых фильтров находится из соответствующих уравнений по заданным предельно допустимым параметрам  $\Delta a_{max}$ ,  $a_{0min}$  в полосах, определяемых номинальными граничными частотами  $f_{kn}$ . Расчет собственно фильтра может быть выполнен по любым значениям  $\Delta a$ ,  $a_0$  и  $f_k$ , принадлежащим определенной области допустимых исходных параметров.

В качестве примера на рис. 1 показаны АЧХ цифрового фильтра нижних частот Золотарева-Кауэра и планы допусков. Вместо  $\Delta a$ ,  $a_0$ , возможно использование и других пар параметров, а именно  $\delta_p$ ,  $\delta_s$  и  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  (все меньше единицы), которые также широко используются на практике и именуются пульсациями АЧХ в соответствующих полосах. Здесь следует отметить, что расчет обсуждаемых фильтров на самом деле выполняется по соотношениям, содержащим параметры  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ . Поскольку весь этот набор параметров потребуется для дальнейшего изложения в табл. 1 и табл. 2 даны формулы пересчета одних параметров через другие, соответственно для полосы пропускания и задерживания. Заметим также, что имеет место соответствие

$$\{\Delta a_{max}, a_{0min}\} \rightarrow \{\delta_{pmax}, \delta_{smax}\}, \quad \{\delta_{1max}, \delta_{2max}\} \text{ и } \{\varepsilon_{1max}, \varepsilon_{2min}\}.$$

Таблица. 1. Параметры АЧХ в полосе пропускания

$\Delta a$ , дБ	$\delta_p$	$\delta_1$	$\varepsilon_1$
$-20\lg(1 - \delta_p)$	$1 - 10^{-\frac{\Delta a}{20}}$	$\frac{1 - 10^{-\frac{\Delta a}{20}}}{1 + 10^{-\frac{\Delta a}{20}}}$	$\sqrt{10^{\frac{\Delta a}{10}} - 1}$
$-20\lg \frac{1 - \delta_1}{1 + \delta_1}$	$\frac{2\delta_1}{1 + \delta_1}$	$\frac{\delta_p}{2 - \delta_p}$	$\sqrt{\frac{1}{(1 - \delta_p)^2} - 1}$
$10\lg(1 + \varepsilon_1^2)$	$1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2}}$	$\frac{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2} - 1}{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2} + 1}$	$\frac{2\sqrt{\delta_1}}{1 - \delta_1}$

Таблица. 2. Параметры АЧХ в полосе задерживания

$a_0$ , дБ	$\delta_s$	$\delta_2$	$\varepsilon_2$
$-20\lg \delta_s$	$10^{-\frac{a_0}{20}}$	$\frac{2 \cdot 10^{-\frac{a_0}{20}}}{1 + 10^{-\frac{\Delta a}{20}}}$	$\sqrt{10^{\frac{a_0}{10}} - 1}$
$-20\lg \frac{\delta_2}{1 + \delta_1}$	$\frac{\delta_2}{1 + \delta_1}$	$\frac{2\delta_s}{2 - \delta_p}$	$\sqrt{\frac{1}{\delta_s^2} - 1}$
$10\lg(1 + \varepsilon_2^2)$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_2^2}}$	$\frac{2}{\sqrt{1 + \varepsilon_2^2} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon_1^2}} + 1 \right)}$	$\sqrt{\left( \frac{1 + \delta_1}{\delta_2} \right)^2 - 1}$

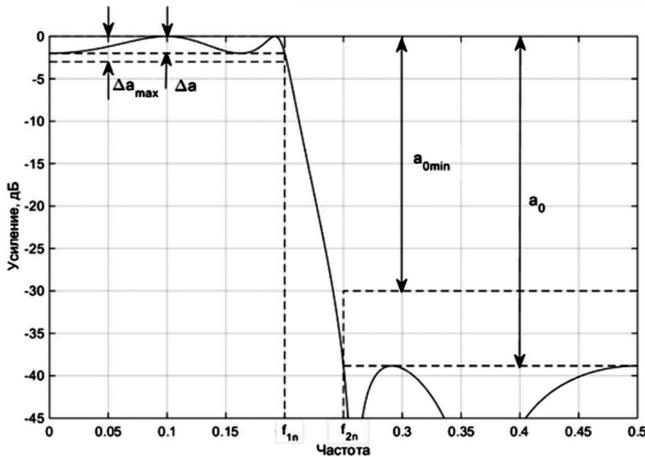


Рис. 1. АЧХ фильтра и планы допусков

**Два определения максимальной взвешенной ошибки АЧХ**

Широко используются два определения максимальной взвешенной ошибки АЧХ фильтра

$$e = \max \left( \frac{\delta_p}{\delta_{p \max}}, \frac{\delta_s}{\delta_{s \max}} \right) \text{ и } \tilde{e} = \max \left( \frac{\delta_1}{\delta_{1 \max}}, \frac{\delta_2}{\delta_{2 \max}} \right).$$

Здесь знаменатели соответствуют заданным значениям пульсаций (весам), а числители – пульсациям, полученным в результате расчета фильтра.

Используя соотношения из табл.1 и табл. 2, можно убедиться, что имеют место равенства

$$e = \tilde{e} \frac{1 + \delta_{1 \max}}{1 + \delta_1} \text{ и } \tilde{e} = e \frac{2 - \delta_{p \max}}{2 - \delta_p}.$$

Очевидно, что  $e \geq \tilde{e}$ . Минимуму ошибки  $e$  соответствует минимум ошибки  $\tilde{e}$  и наоборот, но они не равны [1]. Далее будем использовать ошибку  $e$ .

**Минимум максимальной взвешенной ошибки**

Минимум ошибки  $e$  достигается при условии равенства взвешенных или, иначе говоря, относительных уровней пульсаций, т.е.

$$e_{\min} = \frac{\delta_p}{\delta_{p \max}} = \frac{\delta_s}{\delta_{s \max}}.$$

При  $\delta_{p \max} = \delta_{p \min}$  получим равенство абсолютных уровней пульсаций. Для определения неизвестных  $\delta_p$  и  $\delta_s$  требуется еще одно уравнение. Для обсуждаемых фильтров это уравнение определения порядка фильтра  $N$ , которое можно представить в неявной форме как

$$N = F \left( \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, m \right),$$

где  $F(\cdot)$  – функция, определяемая видом используемой аппроксимации; параметр  $m$  зависит от заданных номинальных граничных частот и будет определен далее. Значение  $N$  в этом выражении фиксировано и обеспечивает удовлетворение заданных требований к АЧХ фильтра.

Таким образом, для нахождения  $\delta_p$  и  $\delta_s$ , а значит и  $e_{\min}$ , необходимо решить систему двух уравнений, которую можно записать в явной форме как

$$\begin{cases} \frac{\delta_p}{\delta_{p \max}} = \frac{\delta_s}{\delta_{s \max}}, \\ \varepsilon_1^2 = m', \\ \varepsilon_2^2 = m', \end{cases} \quad (1)$$

где параметр  $m'$  зависит от  $m$ , выбранного порядка фильтра и будет определен ниже.

Учитывая, что согласно табл. 1 и табл. 2,

$$\varepsilon_1^2 = \frac{1}{(1-\delta_p)^2} - 1 \text{ и } \varepsilon_2^2 = \frac{1}{\delta_s^2} - 1$$

систему (1) можно свести к уравнению четвертой степени относительно  $\delta_p$

$$\delta_p^4 \frac{1-m'}{m'} r - \delta_p^3 \frac{1-m'}{m'} 2r + \delta_p^2 (1-r) - 2\delta_p + 1 = 0, \quad (2)$$

где  $r = \delta_{s \max}^2 / \delta_{p \max}^2$ , параметр  $m'$  определяется по соотношению инверсии уравнения порядка  $N$ , которое, в частности, для фильтров нижних частот Золотарева – Кауэра приведено в [2]. Ниже представлены выражения для определения этого параметра для всех обсуждаемых фильтров.

Параметр  $m'$  для фильтров Золотарева-Кауэра

$$m' = \begin{cases} \left\{ \prod_{i=1}^{N/2} m \operatorname{sn}^4 \left[ \frac{2i-1}{N} K(m), m \right] \right\}^2, & N - \text{четное,} \\ m \left\{ \prod_{i=1}^{(N-1)/2} m \operatorname{cd}^4 \left[ \frac{2i}{N} K(m), m \right] \right\}^2, & N - \text{нечетное,} \end{cases}$$

где  $K(m)$  – полный эллиптический интеграл 1-го рода,  $\operatorname{sn}[\cdot]$  и  $\operatorname{cd}[\cdot]$  – эллиптические функции Якоби,

– для фильтров Чебышева (I и II)

$$m' = ch^{-2} (N \operatorname{arch} m^{-1/2}),$$

– для фильтров Баттерворта

$$m' = \exp(-N \ln m^{-1}).$$

В приведенных соотношениях

$$m = \begin{cases} (\Omega_1 / \Omega_2)^2 - \text{для фильтров нижних} \\ \text{и верхних частот,} \\ \min^{-2} \left[ \frac{\Omega_4^2 - \Omega_2 \Omega_3}{\Omega_4 (\Omega_3 - \Omega_2)}, \frac{\Omega_2 \Omega_3 - \Omega_1^2}{\Omega_1 (\Omega_3 - \Omega_2)} \right] - \\ \text{для полосовых фильтров,} \\ \max^2 \left[ \frac{\Omega_3^2 - \Omega_1 \Omega_4}{\Omega_3 (\Omega_4 - \Omega_1)}, \frac{\Omega_1 \Omega_4 - \Omega_2^2}{\Omega_2 (\Omega_4 - \Omega_1)} \right] - \\ \text{для режекторных фильтров,} \end{cases}$$

где  $\Omega_k = \begin{cases} f_{kn} & \text{– для аналоговых фильтров,} \\ \operatorname{tg}(\pi f_{kn}) & \text{– для цифровых фильтров,} \end{cases} \quad k = 1, \dots, 4,$

$f_{1n} < f_{2n} < f_{3n} < f_{4n}$ , обозначения  $m$  и  $m'$  заимствованы из [3].

Из всех корней уравнения (2) интерес представляет корень, лежащий в диапазоне  $0 < \delta_p < \delta_{p \max}$  или, если точнее, в диапазоне  $\delta_{p \min} \leq \delta_p \leq \delta_{p \max}$  ( $\delta_{p \min}$  определяется по соотношениям из [4]). Поэтому решение (3) можно найти одним из простых численных методов поиска минимума функции одной переменной, что было сделано в программе, описанной в [5]. С другой стороны, нетрудно показать, что для малых  $\delta_p$  имеет место приближенное решение уравнения (2), которому соответствует

$$\delta_p \cong \sqrt[3]{\frac{m'}{2r}}. \quad (3)$$

По значению  $\delta_p$ , найденному из уравнения (2) или по формуле (3), можно определить любые другие параметры из табл. 1 и табл. 2, соответствующие точному или приближенному значению  $e_{\min}$ . Ясно, что в частном случае при  $r = 1$  решения (2) и (3) приводят к равенству абсолютных уровней пульсаций  $\delta_p = \delta_s$  и упрощению (2) и (3).

Сравним  $\delta_p$ , полученные из (2) и (3), а также соответствующие им  $e_{\min}$  для цифровых фильтров нижних частот Золотарева-Кауэра. В примере зададимся следующими требованиями к АЧХ:

$$f_{1n} = 0,15, f_{2n} = 0,16, a_{0 \text{ мн}} = 40 \text{ дБ } (\delta_{p \max} = 0,01) \text{ и}$$

$$\Delta a_{\max} = 3 \text{ дБ } (\delta_{p \max} = 0,292).$$

Результаты расчетов представлены в табл. 3 для  $N = 6, 8$  и  $12$ . Как видим, с увеличением  $N$  значения  $\delta_p$ , полученные из (2) и (3), уменьшаясь сближаются. Становятся близкими и соответствующие им значения  $e_{\min}$ .

Таблица 3. Оценки параметра  $\delta_p$  и соответствующих им значений  $e_{\min}$

Выражение	$N = 6$		$N = 8$		$N = 12$	
	$\delta_p$	$e_{\min}$	$\delta_p$	$e_{\min}$	$\delta_p$	$e_{\min}$
(2)	0,238	0,815	0,0644	0,221	0,00394	0,013
(3)	0,273	0,937	0,0666	0,228	0,00395	0,014

Заметим, что при произвольных требованиях к АЧХ фильтра достаточно точную оценку  $e_{\min}$ , можно достичь, если исходное  $\delta_{p \max}$  или  $\delta_p$ , рассчитанное по формуле (3), как в примере для  $N = 8$  и  $12$ , много меньше единицы.

### Заключение

Получены два соотношения для точного и приближенного определения минимума максимальной взвешенной ошибки аппроксимации АЧХ классических аналоговых и цифровых фильтров Золотарева-Кауэра, Чебышева (I и II) и Баттерворта нижних и верхних частот, полосовых и режекторных. Приведены численные расчеты. Представленные соотношения могут быть полезны при изучении или проектировании фильтров.

### Литература

1. Мингазин А.Т. Незквивалентность двух способов оценки допустимости АЧХ фильтров. // Радиотехника. 1997. № 12. С. 70-71.
2. Vlcek M., Unbehauen R. Degree, ripple and transition width of elliptic filters. // IEEE Trans. 1989. CAS-36. No. 3. P. 469-472.
3. Калахан Д.А. Современный синтез цепей. // М.-Л.: 1966. – 192с.
4. Мингазин А.Т. Экстремальные параметры аналоговых и цифровых фильтров. // Электросвязь. 1999. № 1. С. 22-23.
5. Алёшин Д.В., Мингазин А.Т. Программа для расчета экстремальных параметров цифровых и аналоговых фильтров и ее применение. // Цифровая обработка сигналов. 2006. № 1. С. 45-49.