Вариация исходных параметров в задаче анализа БИХ-фильтров

Александр МИНГАЗИН
alexmin@radis.ru

В статье рассмотрен метод вариации исходных параметров для анализа БИХ-фильтров с квантованными коэффициентами. Представлены варианты построения зависимостей контролируемых параметров от исходных параметров АЧХ. Применительно к пяти структурам фильтров, а именно прямая форма, две каскадные и две структуры на основе фазовых цепей, проводится сравнение зависимостей максимальной относительной ошибки АЧХ от параметра, связанного с исходной неравномерностью АЧХ в полосе пропускания. Для каскадных фильтров дополнительно проиллюстрировано влияние масштабирования и расстановки звеньев на результаты анализа.

Введение

Для анализа БИХ-фильтров с квантованными коэффициентами обычно используют методы, связанные с оценкой статистической длины слова или с прямым вычислением достаточной длины слова коэффициентов [1]. С помощью вариации исходных параметров (ВИП), по которым выполняется собственно расчет фильтров, можно улучшить получаемые результаты как для статистического [2–4], так и для прямого метода [4–14]. Кроме того, построенную зависимость контролируемого параметра АЧХ фильтра от выбранного исходного параметра можно непосредственно использовать для анализа степени влияния квантования коэффициентов [4–6, 10, 11]. Статистический метод в отличие от прямого может давать завышенные результаты, особенно при грубом шаге квантования или иначе при короткой длине слова коэффициентов. Далее уделим внимание только прямому методу с применением ВИП. Будем называть его ВИП-анализом.

В [4] со ссылкой на [5] отмечено, что особенно важно, как запас в плане допусков для фильтров с непрерывными коэффициентами распределяется на полосу пропускания и задерживания для получения фильтров с минимальной длиной слова коэффициентами. В связи с этим в [4] применительно к каскадным фильтрам Кауэра (называемым далее фильтрами Золотарева — Кауэра) на звеньях прямой формы проиллюстрированы зависимости максимальной относительной ошибки АЧХ в полосе пропускания и задерживания от вспомогательного параметра, определяемого по исходной неравномерности АЧХ в полосе пропускания. Показано, что в полосе задерживания при квантованных коэффициентах эта зависимость близка к идеальной, то есть соответствующей непрерывным коэффициентам. В то же время аналогичная зависимость в полосе пропускания сильно отличается от идеальной и совершенно нерегулярна. Это подтверждает известный факт, что каскадная структура очень чувствительна к квантованию коэффициентов. Судя по литературе, автор [4] больше не возвращался к такому методу анализа.

Тем не менее этот подход получил развитие в работах [6, 10, 11], в которых применительно к каскадным фильтрам анализируются зависимости параметров АЧХ в полосе пропускания и задерживания непосредственно от исходной неравномерности АЧХ. В [6] это проиллюстрировано для фильтров Чебышева I и Золотарева — Кауэра с отличающимися требованиями к АЧХ. Сравнительный анализ фильтров Баттерворта, Чебышева I и Золотарева — Кауэра выполнен в [10], а фильтров Золотарева — Кауэра на звеньях прямой формы и на комплексных фазовых звеньях — в [11].

В работах [6, 10, 11], в отличие от [4], учтено, что на конечном интервале изменения исходной неравномерности АЧХ в полосе пропускания или вспомогательного параметра, введенного в [4], имеет место конечное число интервалов разной длины, каждому из которых соответствует свой вектор квантованных коэффициентов. Это позволило обнаружить следующие факты:

- при фиксированной длине слова коэффициентов в пределах допустимого диапазона анализа для некоторого значения исходной неравномерности может иметь место неустойчивый фильтр, а для другого — фильтр с допустимой АЧХ [6];
- для двух бесконечно близких значений исходной неравномерности АЧХ можно наблюдать очень большое различие в неравномерностях, соответствующих квантованным коэффициентам [10, 11] — например, 7 дБ и 0,5 дБ в [10];
- не всегда аппроксимация или структура с меньшей коэффициентной чувствительностью приводит к меньшей длине слова коэффициентов [10, 11];
- для каскадных фильтров не всегда проблема точности АЧХ в полосе пропускания более остра, чем в полосе задерживания [10];
- процедура подбора вспомогательного параметра, предложенная в [4], может приводить к завышенной длине слова коэффициентов.

Результаты [4, 6, 10, 11] позволяют также отметить, что некорректно судить о преимуществе той или иной аппроксимации АЧХ или структуры фильтра по расчетам, выполненным только для одного значения исходной неравномерности АЧХ.

В данной статье ВИП-анализ применен для пяти структур БИХ-фильтров нижних частот Золотарева — Кауэра. Представлено описание контролируемых и исходных параметров АЧХ. На примере каскадных фильтров с непрерывными и квантованными коэффициентами проиллюстрированы и обсуждены варианты построения зависимостей контролируемых параметров от исходных. Для структуры прямой формы, двух каскадных структур на звеньях прямой и оптимальной формы и двух структур на основе фазовых цепей на звеньях прямой и волновой формы проведен сравнительный анализ зависимостей максимальной относительной ошибки АЧХ от вспомогательного параметра, введенного в [4]. Для каскадных фильтров дополнительно иллюстрируется влияние масштабирования и расстановки звеньев на результаты анализа.

Контролируемые и исходные параметры АЧХ

Для фильтров со стандартными требованиями к АЧХ должны выполняться следующие условия:

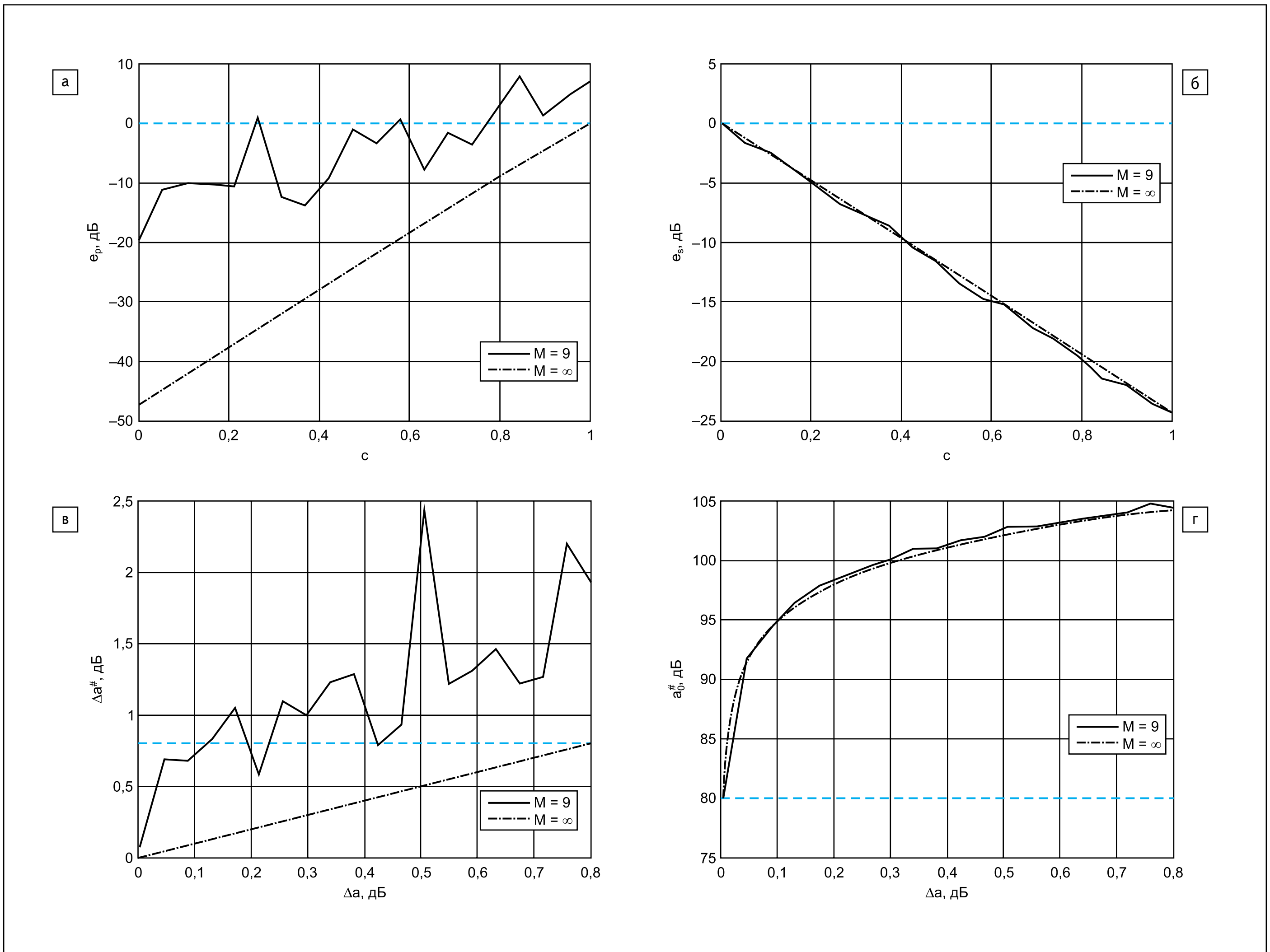

Рис. 1. Зависимости для структуры КПФ:
а) ошибки e_p от параметра c; б) ошибки e_s от параметра c; в) неравномерности $\Delta a^{\#}$ от исходной неравномерности Δa; г) ослабления $a_0^{\#}$ от исходной неравномерности Δa

$$\begin{cases} e_p = \delta_p^{\#}/\,\delta_{p\,\max} \le 1 \\ e_s = \delta_s^{\#}/\,\delta_{s\,\max} \le 1 \end{cases}, \qquad (1)$$

или

$$e = \max(e_p, e_s) \le 1, \qquad (2)$$

где e_p и e_s — максимальные относительные ошибки АЧХ синтезированного фильтра в номинальных полосах пропускания и задерживания; $\delta_p^{\#}$ и $\delta_s^{\#}$ — максимальные уровни пульсаций АЧХ в этих полосах, а $\delta_{p\max}$ и $\delta_{s\max}$ — заданные их предельно допустимые значения; полагается, что максимальный уровень АЧХ нормирован к единице.

Два других условия, эквивалентные (1), имеют вид:

$$\begin{cases} \Delta a^{\#} = -20\lg(1-\delta_p^{\#}) \le \Delta a_{\max} \\ a_0^{\#} = -20\lg\,\delta_s^{\#} \ge a_{0\min} \end{cases}, \qquad (3)$$

где $\Delta a^{\#}$ — неравномерность АЧХ в номинальной полосе пропускания и $a_0^{\#}$ — минимальное ослабление АЧХ в номинальной полосе задерживания синтезированного фильтра; а $\Delta a_{\max}$ и $a_{0\min}$ — их заданные предельно допустимые значения. Все эти параметры выражены в децибелах. При этом максимальный уровень АЧХ нормирован к нулю децибел.

При фиксированном порядке фильтра N контролируемые параметры, определяемые (1)–(3), зависят от исходных параметров, по которым рассчитывается фильтр. Обычно это Δa — неравномерность АЧХ в полосе пропускания; a_0 — минимальное ослабление АЧХ в полосе задерживания; f_k — граничные частоты полос пропускания и задерживания, $k \le 4$.

Порядок N, удовлетворяющий заданным требованиям, находится из соответствующих уравнений по $\Delta a_{\max}$, $a_{0\min}$ и номинальным граничным частотам f_{kn}. Расчет собственно фильтра может быть выполнен по любым значениям Δa, a_0 и f_k, принадлежащим определенной области допустимых исходных параметров [7]. При этом рассчитанный фильтр будет удовлетворять условиям (1)–(3).

При выбранном N для расчета фильтров нижних частот Золотарева — Кауэра, Чебышева или Баттерворта в качестве независимых можно взять соответственно любые три, два или один из четырех исходных параметров: Δa, a_0, f_1 и f_2 [7]. Для фильтров Золотарева — Кауэра, обсуждаемых ниже, расчет можно выполнить по Δa, f_1 и f_2.

Положим $f_1 = f_{1n}$, $f_2 = f_{2n}$ и будем рассматривать зависимости контролируемых параметров (1)–(3) от исходного Δa или от вспомогательного параметра c. Связь Δa и c определим как:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1\min}(\varepsilon_{1\max}/\varepsilon_{1\min})^c, \qquad (4)$$

где $\varepsilon_1 = \sqrt{10^{\Delta a/10}-1}$, а $\varepsilon_{1\min}$ и $\varepsilon_{1\max}$ соответствуют $\Delta a_{\min}$ и $\Delta a_{\max}$.

Формула (4) является упрощенной записью выражения, представленного в [4], что облегчает его понимание. При $c = 0$ получим:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1\min} \text{ и } \Delta a = \Delta a_{\min},$$

а при $c = 1$ —

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{1\max} \text{ и } \Delta a = \Delta a_{\max}.$$

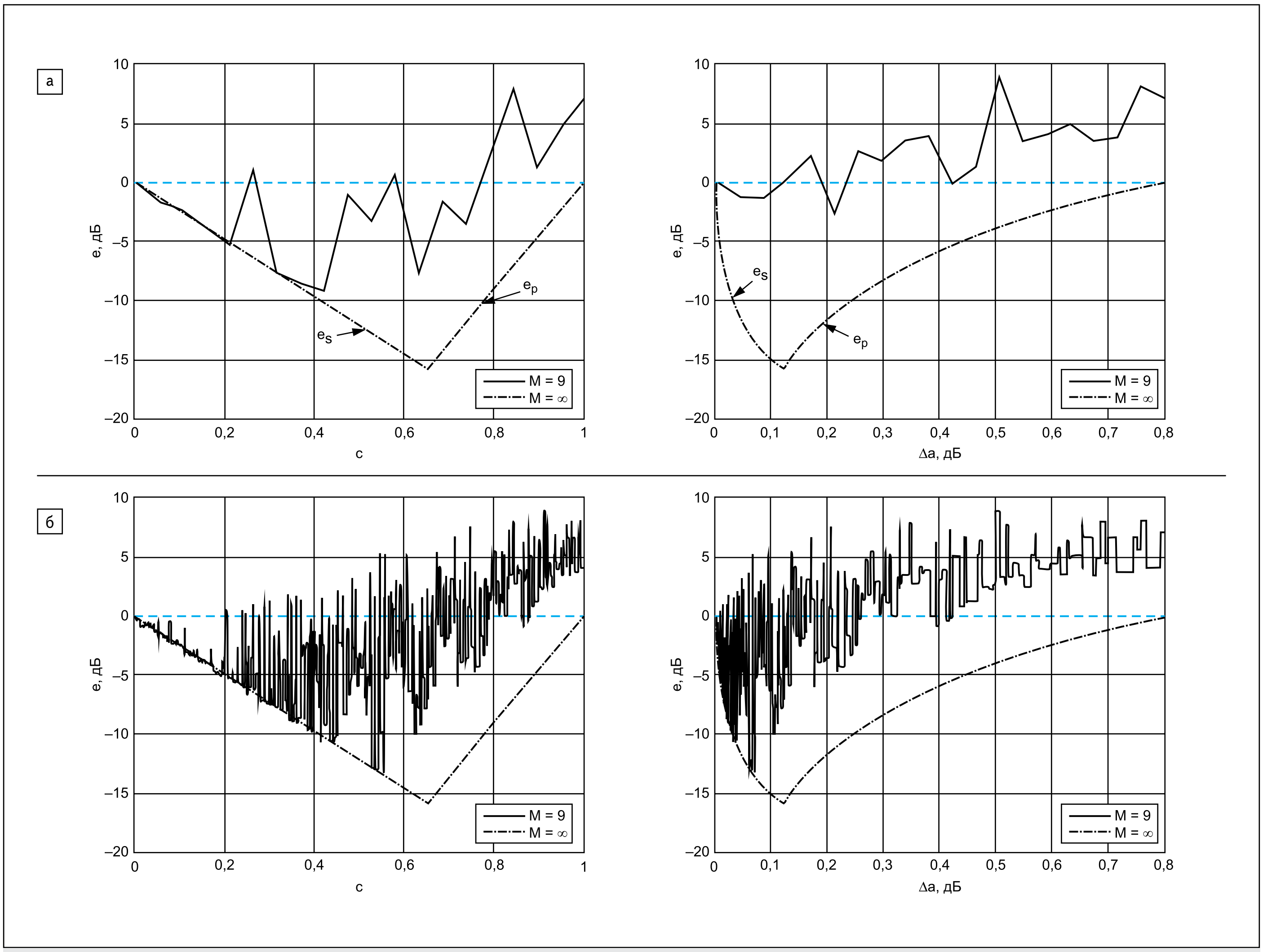

Рис. 2. Зависимости ошибки e от параметров c и Δa для структуры КПФ: а) малое число точек параметров; б) большое

Таким образом, диапазону вариации

$$0 \le c \le 1$$

соответствует диапазон

$$\Delta a_{\min} \le \Delta a \le \Delta a_{\max}.$$

Для $\Delta a < \Delta a_{\min}$ ослабление $a_0^{\#}$ становится недопустимым, то есть $a_0^{\#} < a_{0\min}$, а для $\Delta a = \Delta a_{\max}$ — максимальным.

Заметим, что вместо варьируемого исходного параметра Δa можно использовать ε_1, или δ_p, или даже эллиптический арктангенс (аргумент которого зависит от ε_1), входящий в выражения для расчета полюсов эллиптического фильтра [15], или иначе фильтра Золотарева — Кауэра. Дело лишь в удобстве и проблеме экстремально малых значениях $\Delta a_{\min}$. В данной статье эту проблему рассматривать не будем.

Варианты анализируемых зависимостей

Итак, вначале проиллюстрируем и обсудим зависимости контролируемых параметров, определяемых (1)–(3), от исходных c и Δa применительно только к каскадной структуре фильтров на звеньях прямой формы или для краткости к структуре КПФ. Масштабирование передаточной функции фильтра опустим.

Зададим следующие требования к АЧХ фильтра нижних частот:

$$f_{1n} = 0{,}04,\ f_{2n} = 0{,}08,$$
$$\Delta a_{\max} = 0{,}8 \text{ дБ},\ a_{0\min} = 80 \text{ дБ}. \qquad (5)$$

Здесь частоты нормированы относительно частоты дискретизации. Этим требованиям с достаточно большим запасом удовлетворяет фильтр Золотарева — Кауэра с $N = 7$ (минимальное $N = 6$) так, что исходный параметр Δa может принимать значения от $\Delta a_{\min} = 0{,}00324$ дБ до $\Delta a_{\max}$. Напомним, что соответствующий параметр c всегда изменяется в диапазоне 0–1.

Для требований (5) при непрерывных ($M = \infty$) и квантованных ($M = 9$) коэффициентах на рис. 1а,б показаны зависимости ошибок в полосе пропускания и задерживания e_p и e_s от параметра c, а на рис. 1в,г — зависимости неравномерности АЧХ в полосе пропускания $\Delta a^{\#}$ и ослабления АЧХ в полосе задерживания $a_0^{\#}$ от исходной неравномерности Δa. Здесь M — длина слова коэффициентов квантованных с шагом $q = 2^{-M}$. Горизонтальные пунктирные прямые на рисунках соответствуют допускам на параметры АЧХ. Заметим, что для построения идеальных зависимостей ($M = \infty$) не требуется расчета коэффициентов фильтра.

Как видим, результаты, полученные при $M = \infty$ и $M = 9$, на рис. 1а,в сильно различаются, а на рис. 1б,г очень хорошо совпадают, что подтверждает известный факт о слабом влиянии квантования коэффициентов структуры КПФ на АЧХ в полосе пропускания.

Кривые на рис. 1а,б можно изобразить на одном рисунке, как в [4], но это делает его сложным, особенно при использовании большого числа значений параметра c. Вместо этого перейдем к рассмотрению зависимостей контролируемого параметра (2) от c и Δa, построенных на рис. 2а. В этом случае кривая ошибки e для непрерывных коэффициентов формируется из двух кривых e_p и e_s, пересекающихся в точке минимума

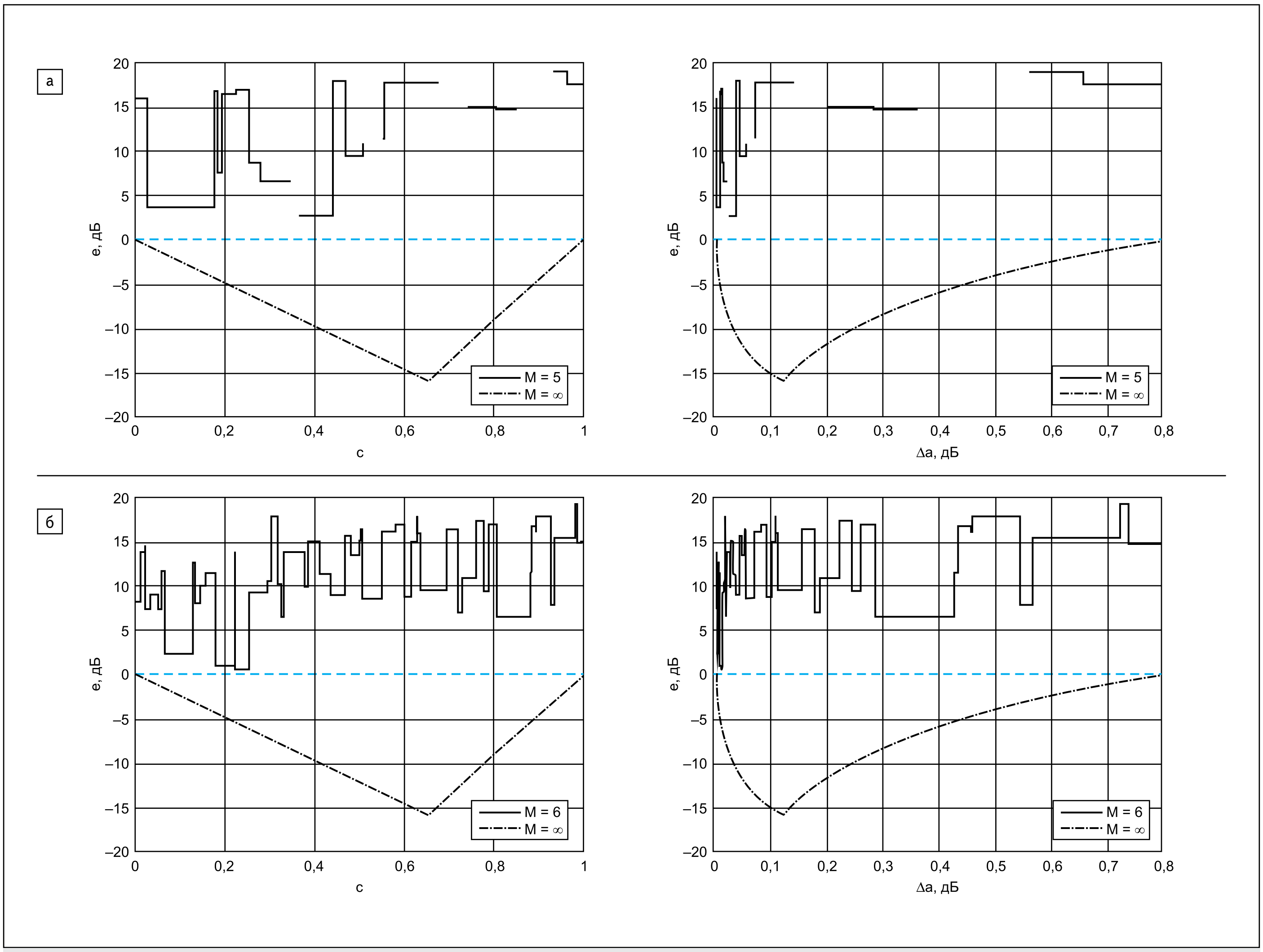

Рис. 3. Зависимости ошибки е от параметров с и Δа для структуры КПФ: а) длина слова коэффициентов М = 5; б) М = 6

$e = e_p = e_s = -15{,}86$ дБ. Отметим, что можно сколь угодно приблизиться к этому уровню ошибки за счет увеличения *M*, но получить меньшее значение не удастся.

По левой части рис. 2а еще можно сказать о большем влияния квантования коэффициентов на АЧХ в полосе пропускания, чем в полосе задерживания, но по правой части это сделать затруднительно. Однако если увеличить длину слова коэффициентов, проблема устраняется.

Все рассмотренные зависимости на рис. 1 и рис. 2а, соответствующие квантованным коэффициентам, построены для малого числа значений параметров *c* и Δ*a* и поэтому не дают полной картины, поскольку на самом деле эти зависимости являются кусочно-постоянными и содержат конечное число интервалов постоянства контролируемых параметров [6], что иллюстрируется на рис. 2б. Увеличение числа значений (точек) Δ*a* позволяет по правой части рис. 2б, так же как и по левым частям рис. 2а и б, сделать вывод о меньшем влиянии квантования коэффициентов на АЧХ в полосе задерживания, чем в полосе пропускания. Преимущество изображения зависимости ошибки *e* от *c*, а не от Δ*a* заключается в более равномерном распределении интервалов постоянства *e* на графике, что требует меньшего числа точек для его построения. Однако вспомогательный параметр *c*, кроме точки *c* = 1, не несет информации о реальных значениях Δ*a*.

С уменьшением длины слова *M* количество интервалов постоянства ошибки е также уменьшаться, а их размеры увеличиваются. Растут и уровни ошибки, хотя возможны исключения. Переход от кривых на рис. 2б при *M* = 9 к кривым на рис. 3а при *M* = 5 и на рис. 3б при *M* = 6 приводит к тому, что они не попадают в зону допуска, то есть не опускаются ниже пунктирной линии 0 дБ. Кроме того, при некоторых значениях параметров на рис. 3а появляются участки разрывов, соответствующие неустойчивости фильтра.

При малой длине слова *M* затруднительно судить о степени влияния квантования коэффициентов на АЧХ в каждой из двух полос. В этом случае лучше обратиться к построению кривых на рис. 1 при достаточном числе точек по осям абсцисс.

Заметим, что параметры *c* или Δ*a* можно заменить номером интервала постоянства контролируемых параметров АЧХ, как это было сделано в [9–11]. При такой замене на построенных графиках, уже с равномерным шагом по оси абсцисс, первому интервалу соответствует *c* = 0 и $\Delta a = \Delta a_{\min}$, а последнему — *c* = 1 и $\Delta a = \Delta a_{\max}$.

Кусочно-постоянные кривые на правой части рис. 3а,б по существу иллюстрируют однопараметрический алгоритм ВИП для синтеза фильтров с минимальной длиной слова коэффициентов [6], который заключается в полном переборе интервалов постоянства ошибки е для $M = M_0, M_0+1, \dots$ до тех пор, пока для некоторых *M* и Δ*a* не будут выполнены заданные требования к АЧХ. Здесь M_0 — начальное значение *M*. Из-за сильной хаотичности поведения кривых какая-либо логика здесь не подходит. При переборе важно не пропускать интервалы, делая на каждом из них для экономии компьютерного времени лишь одну оценку ошибки *e*. Эти положения учтены и в трехпараметрическом алгоритме ВИП [9], в котором для определения начальных приближений использован метод предложенный в [7].

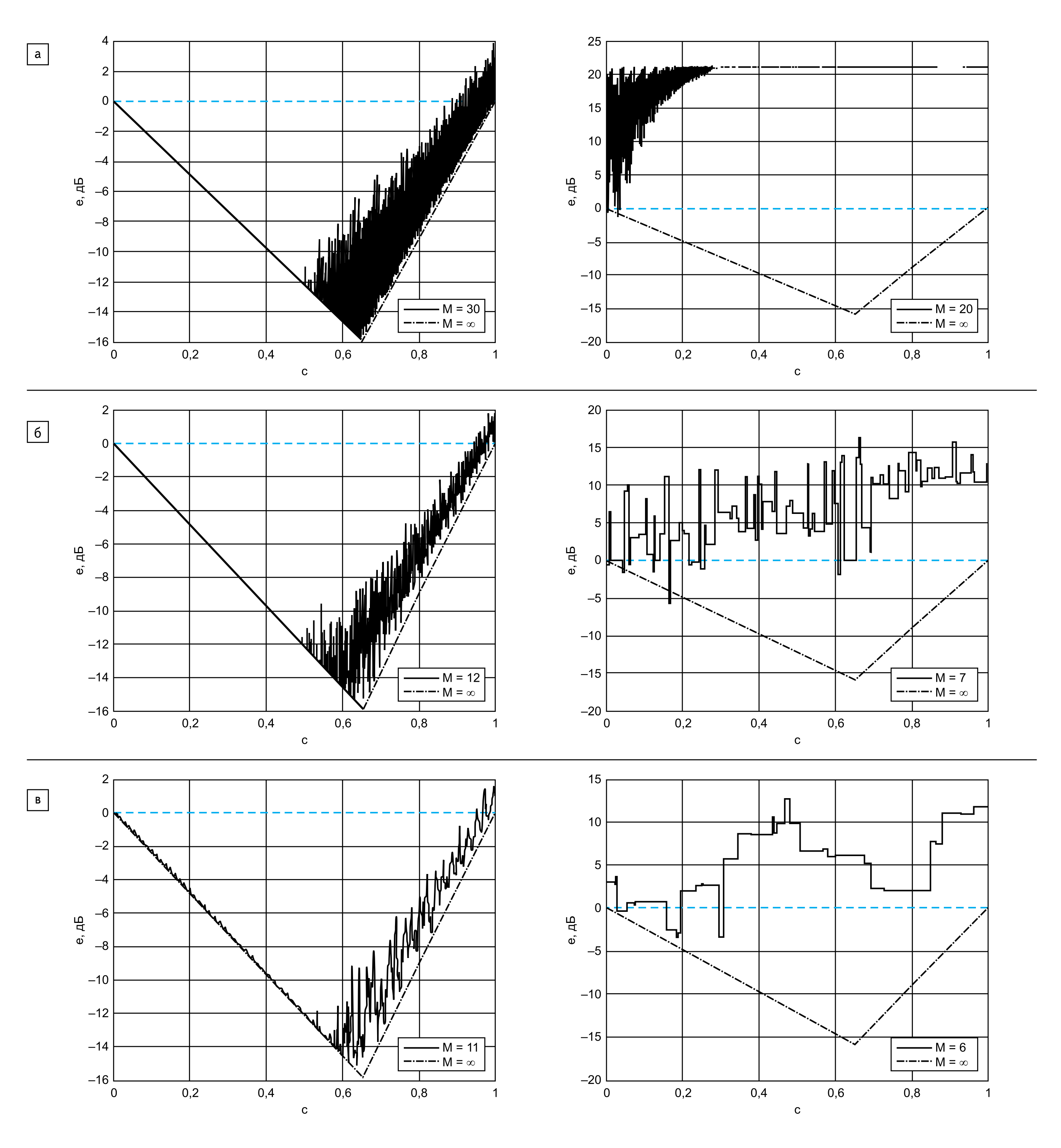

Рис. 4. Зависимости ошибки e от параметра c для трех структур фильтров: а) прямая форма; б) КПФ; в) КОФ

ВИП-анализ пяти структур

Проведем анализ влияния квантования коэффициентов на параметры АЧХ фильтров с требованиями (5) для пяти структур. Это структура прямой формы, рассмотренная выше каскадная структура на звеньях прямой формы (КПФ), каскадная структура на звеньях оптимальной формы (КОФ) и две структуры на основе фазовых цепей на звеньях прямой и волновой формы (ФПФ и ФВФ). Все структуры, кроме прямой формы, недавно обсуждались в [14], где также приведены схемы звеньев этих структур.

В отличие от [14] масштабирование для каскадных структур, как и в предыдущем разделе статьи, опустим. Не будем его использовать и для рассматриваемой здесь прямой формы. Однако перед квантованием (с шагом $q = 2^{-M}$) коэффициентов числителя и знаменателя передаточной функции этой структуры выполним по отдельности их нормирование с помощью множителей, равных степени два так, чтобы максимальные значения коэффициентов числителя и знаменателя не превышали единицу.

Для анализа влияния квантования коэффициентов на АЧХ ограничимся построением зависимостей ошибки e от параме-

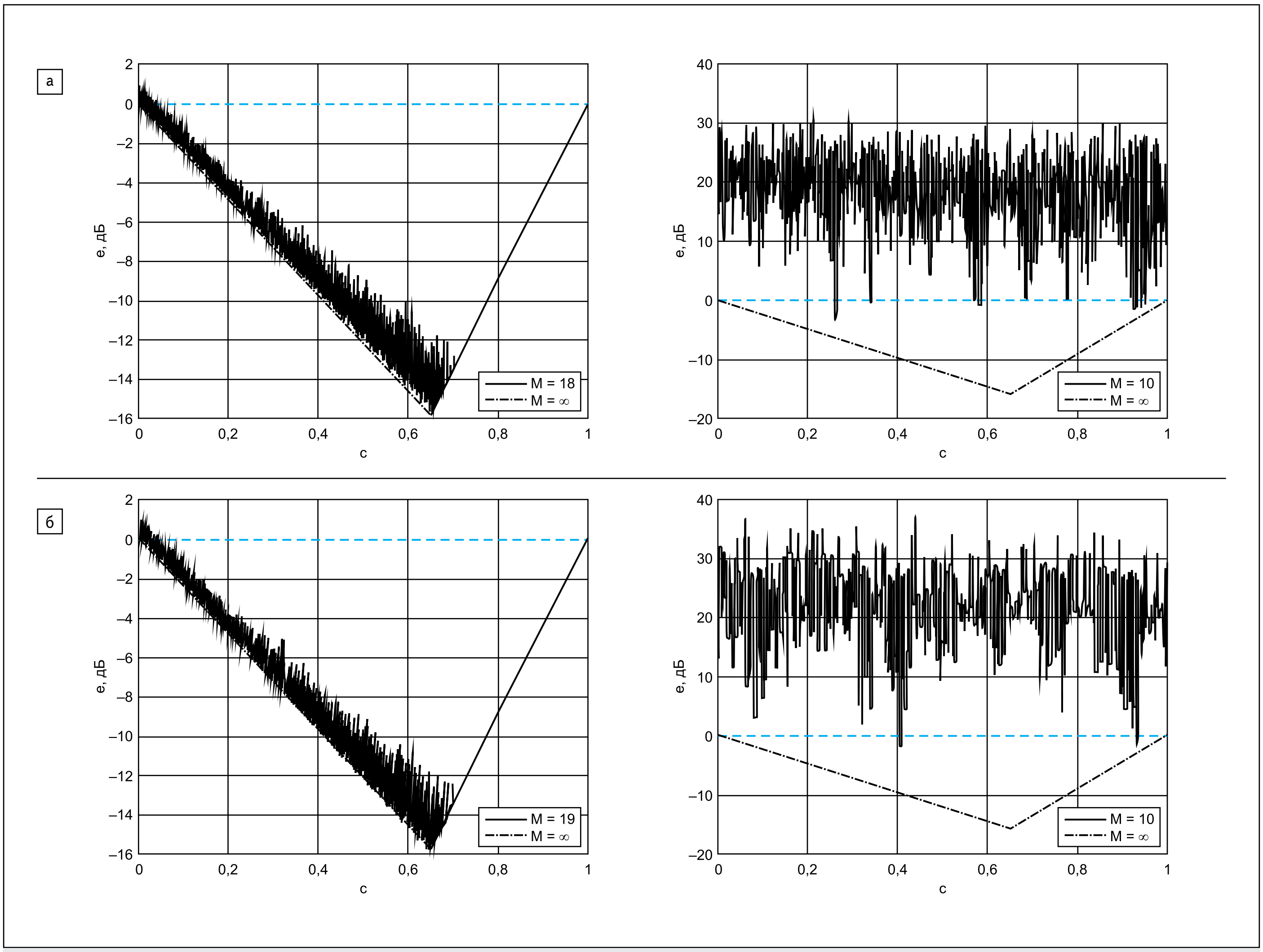

Рис. 5. Зависимости ошибки e от параметра c для структур: а) ФПФ; б) ФВФ

тра *c*. Для каждой структуры представим два графика. Первый — для достаточно большой длины слова коэффициентов *M*, при которой для всех структур максимальное отклонение ошибки *e* от ее идеального поведения было бы примерно одинаковым, а второй — для *M*, при котором еще удовлетворяется условие (2). На рис. 4, 5 представлены обсуждаемые зависимости для пяти структур. На рис. 4а — для прямой формы, на рис. 4б — для КПФ, на рис. 4в — для КОФ, на рис. 5а — для ФПФ и рис. 5б — для ФВФ.

Согласно левой части рис. 4а,б,в квантование коэффициентов здесь заметно влияет на ошибку *e* в полосе пропускания, но выход за пределы допуска ($e > 0$ дБ) имеет место лишь в окрестности параметра $c = 1$ (или $\Delta a = \Delta a_{max}$). Как видим, значения $M = 30$, 12 и 11 получены для структур прямой формы, КОФ и КПФ. Из правой части рис. 4а,б,в следует, что минимальные $M = 20$, 7 и 6 достигнуты соответственно для структур прямой формы, КПФ и КОФ. Эти результаты свидетельствуют о сильном влиянии квантования коэффициентов фильтров прямой формы на их АЧХ.

Согласно левой части рис. 5а,б квантование коэффициентов заметно влияет на ошибку *e* в полосе задерживания, но выход за пределы допуска ($e > 0$ дБ) имеет место лишь в окрестности параметра $c = 0$ (или $\Delta a = \Delta a_{min}$). Как видим, $M = 18$ и 19 получены для структур ФПФ и ФВФ. Из правой части рис. 5а,б следует, что для каждой из этих структур минимальное $M = 10$. Однако для структуры ФВФ это значение *M* может быть уменьшено за счет модифицированного представления коэффициентов [14].

Влияние масштабирования и расстановки звеньев

Рассмотрим теперь, как влияет L_∞-масштабирование и расстановка звеньев в каскадных структурах КПФ и КОФ на обсуждаемые зависимости ошибки *e* от вспомогательного параметра *c*. Известны два способа масштабирования каскадных фильтров. Первый связан с введением дополнительных масштабных коэффициентов в передаточную функцию фильтра, а второй с изменением некоторых коэффициентов самой передаточной функции.

Для структуры КПФ используют оба способа. Представленные выше зависимости для структуры КПФ без масштабирования на самом деле относятся и к первому способу масштабирования, поскольку в этом случае введение масштабных коэффициентов и их квантование не сказывается на контролируемых параметрах АЧХ (1)–(3). Однако длина слова масштабных коэффициентов может оказаться больше, чем требуемая для выполнения условий (1)–(3). Второй способ масштабирования для структуры КПФ предполагает изменение коэффициентов числителей звеньев передаточной функции фильтра, что оказывает влияние на контролируемые параметры (1)–(3) при квантовании. Кроме того, результат квантования будет зависеть от расстановки звеньев и полюсно-нулевого объединения. Проиллюстрируем это на двух примерах расстановки звеньев. На рис. 6 показаны зависимости ошибки *e* от параметра *c* при $M = 6$ для расстановок 4321 и 3241 при полюсно-нулевым объединении, как и в [14], по известному правилу ближайших полюсов и нулей. Расстановке 4321 соответствуют добротности полюсов $Q_4 < Q_3 < Q_2 < Q_1$ или

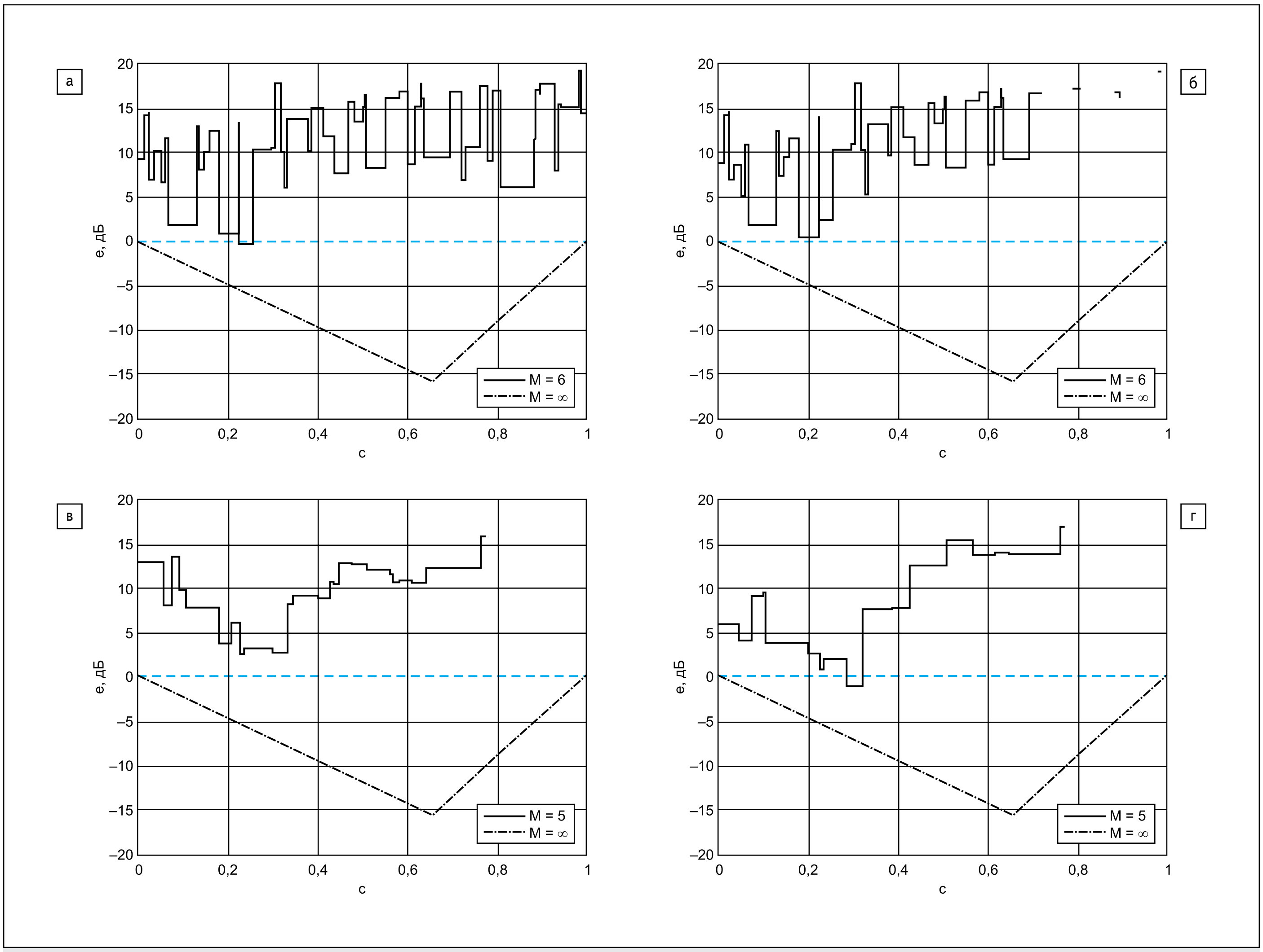

Рис. 6. Зависимости ошибки e от параметра c для структур:
а) КПФ при расстановке звеньев 4321; б) КПФ при расстановке — 3241; в) КОФ при расстановке — 4321; г) КОФ при расстановке — 3241

их радиусы $r_4 < r_3 < r_2 < r_1$, что для фильтров нижних частот эквивалентно. Как видим, кривая при $M = 6$ на рис. 6а попадает в зону допуска, а на рис. 6б — нет. Кривая на рис. 4б, соответствующая фильтру без масштабирования, попадает в зону допуска только при $M = 7$. Можно убедиться, что разрывы кривых на рис. 6б обусловлены равенством нулю всех трех квантованных коэффициентов числителя входного звена фильтра. В результате происходит разрыв цепи. Авторы [16] в этой ситуации говорят, что фильтр неустойчив, хотя его полюсы находятся внутри единичной окружности.

Для структуры КОФ первый способ масштабирования обычно не используется, но возможен и не отличается от описанного для структуры КПФ. Масштабирование по второму способу затрагивает в структуре КОФ не только коэффициенты числителей, но и часть коэффициентов знаменателей звеньев. На рис. 6в,г показаны зависимости ошибки e от параметра c при $M = 5$ для расстановок звеньев 4321 и 3241. Как видим, кривая при $M = 5$ на рис. 6г попадает в зону допуска, а на рис. 6в — нет. Кривая на рис. 4в, соответствующая фильтру без масштабирования, попадает в зону допуска только при $M = 6$.

Для структуры КПФ можно видеть, что места скачков кривых в левой части рис. 3б и на рис. 6а,б, построенных при одном и том же $M = 6$, идентичны, то есть не зависят от масштабирования и расстановки звеньев. В то же время для структуры КОФ такую зависимость от расстановки звеньев можно увидеть, сравнив кривые на рис. 6в,г, построенные при $M = 5$. Эту особенность структуры КОФ необходимо принимать во внимание при разработке алгоритмов ВИП, предназначенных для одновременной минимизации длины слова коэффициентов и шумов фильтра, обусловленных квантованием внутренних переменных.

Таким образом, масштабирование (по второму способу) и расстановка звеньев влияют на результаты ВИП-анализа для обеих каскадных структур фильтров. Очевидно, что изменение в полюсно-нулевых парах также будет оказывать подобное влияние. Однако при оценочном сравнении каскадных фильтров с другими фильтрами, по-видимому, можно обходиться без масштабирования и, следовательно, без полюсно-нулевого упорядочения, зная, что эти действия могут несколько изменить результаты, причем как в худшую, так и в лучшую сторону.

Заключение

Метод ВИП применен для анализа влияния квантования коэффициентов БИХ-фильтров нижних частот Золотарева — Кауэра на их АЧХ. Метод предполагает построение зависимости контролируемого параметра АЧХ от выбранного исходного параметра, используемого для расчета коэффициентов фильтра и принимающего значения в определенных пределах.

На примере каскадной структуры фильтров на звеньях прямой формы с непрерывными и квантованными коэффициентами проиллюстрированы варианты построения этих зависимостей. В качестве исходного параметра использована неравномерность АЧХ в полосе пропускания или связанный с ней вспомогательный параметр, а в качестве контролируемого параметра АЧХ — максимальная относительная ошибка в заданной полосе, а также неравномерность в полосе пропускания и минимальное ослабление в полосе задерживания.

Для структуры прямой формы, двух каскадных структур на звеньях прямой и оптимальной формы и двух структур на основе фазовых цепей на звеньях прямой и волновой формы проведен сравнительный анализ зависимостей максимальной относительной ошибки АЧХ от вспомогательного параметра. Результаты анализа, выполненные для конкретных требований к АЧХ, демонстрируют наиболее сильное влияние квантования коэффициентов для прямой формы и наименьшее влияние для каскадных фильтров. Структуры на основе фазовых цепей занимают промежуточное положение. Для каскадных фильтров дополнительно проиллюстрировано влияние масштабирования и расстановки звеньев на результаты анализа.

Применение ВИП-анализа дает возможность наглядно по графикам анализировать различные БИХ-фильтры с квантованными коэффициентами, причем при произвольном шаге квантования, и может служить хорошим средством для выявления наилучшего сочетания исходных параметров, типа аппроксимации АЧХ и структуры.

Литература

1. Эвенхауз Э. Синтез цифровых фильтров с ограниченной длиной слова коэффициентов // Зарубежная радиоэлектроника. 1973. № 8.
2. Crochiere R. E. A new statistical approach to the coefficient word length problem for digital filters // IEEE Trans. 1975. CAS-22. No 3.
3. Крошьер Р., Оппенгейм А. Анализ линейных цифровых цепей // ТИИЭР. 1975. Т. 63. № 4.
4. Dehner G. On the design Cauer filters with coefficients of limited wordlength // AEU. 1975. Vol. 26. No 4.
5. Schussler H. W. Digitale systeme zur signalverarbeitung. Springer — Verlag. Berlin, 1973.
6. Мингазин А. Т. Метод синтеза цифровых фильтров с коэффициентами конечной разрядности // Электросвязь. 1983. № 7.
7. Мингазин А. Т. Начальные приближения для синтеза цифровых фильтров с минимальной длиной слова коэффициентов // Электронная техника. 1983. Сер. 10. № 6.
8. Мингазин А. Т. Разрядность коэффициентов рекурсивных цифровых фильтров при упрощенном методе синтеза // Радиотехника. 1987. № 2.
9. Мингазин А. Т. Синтез рекурсивных цифровых фильтров при ограниченной разрядности коэффициентов // Электросвязь. 1987. № 9.
10. Мингазин А. Т. Анализ влияния квантования коэффициентов на характеристики цифровых фильтров // Радиотехника. 1987. № 6.
11. Мингазин А. Т. Сравнительный анализ реализаций рекурсивных цифровых фильтров // Радиотехника. 1990. № 1.
12. Milic L. D., Lutovac M. D. Design of multiplierless elliptic IIR filters with a small quantization error // IEEE Trans. 1999. SP-47. No. 2.
13. Мингазин А. Т. Результаты синтеза цифровых фильтров на основе фазовых цепей с конечной длиной слова коэффициентов. 14-я Международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение». DSPA. 2012. Т. 1.
14. Мингазин А. Альтернативы синтеза БИХ-фильтров // Компоненты и технологии. 2017. № 6.
15. Калахан Д. Современный синтез цепей. Энергия, 1966.
16. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Мир, 1982.