

Статья опубликована в журнале “Компоненты и технологии”, 2017, № 6, с. 106-116 ([www.kit\\_e.ru](http://www.kit_e.ru)). Ниже представлен авторский вариант статьи. Ряд неточностей, допущенных автором в журнале, исправлены.

## Альтернативы синтеза БИХ-фильтров

Александр Мингазин  
alexmin@radis.ru

В статье рассмотрены четыре варианта синтеза БИХ-фильтров с заданными требованиями к АЧХ. Этим вариантам соответствуют две каскадные структуры на звеньях прямой и оптимальной формы и две структуры на основе фазовых цепей на звеньях прямой и волновой формы. Предполагается, что все фильтры оперируют с фиксированной точкой. Синтез на базе кратко описанных программных средств DIFID включает минимизацию длины слова коэффициентов фильтра, а для каскадных структур и минимизацию отношения шум/сигнал. Для широкого диапазона граничных частот проведено сравнение синтезированных полосовых фильтров десятого порядка по ряду параметров шума квантования, границе предельного цикла квантования и длине слова коэффициентов.

### Введение

Ограничение длины слова или иначе разрядности переменных и коэффициентов в цифровых фильтрах приводит к ряду известных проблемам. Из-за квантования результатов арифметических операций в КИХ- и БИХ-фильтрах возникают шумы, а в БИХ-фильтрах – имеют место паразитные колебания, называемые предельными циклами квантования (или гранулярными предельными циклами). Кроме того, возможны переполнения разрядной сетки, что может привести к возникновению колебаний переполнения в БИХ-фильтрах и полной потере их работоспособности. Из-за ограничения длины слова коэффициентов передаточной функции фильтров такие их характеристики как, например, АЧХ и ФЧХ, могут стать неприемлемыми.

Простой путь к решению перечисленных проблем, за исключением устранения колебаний переполнения, это наращивание разрядности, что в одних случаях не всегда возможно, а в других не экономично. Более трудный путь связан с выбором подходящей структуры фильтра. Действительно разные по сложности структуры при одной и той же длине слова переменных имеют различные уровни шума и предельного цикла квантования, по-разному реагируют на переполнения, и кроме того для их исполнения требуется различная длина слова коэффициентов.

Выбор структуры бывает затруднительно; приходится проводить дополнительные исследования [1-3]. Так, в [1] сравниваются уровни усиления шума квантования фазовых звеньев волновой и прямой формы, звеньев Митры-Хирано, а также фильтров нижних частот на их основе. Кроме того, уделено внимание проблемам квантования коэффициентов и устойчивости при вынужденном воздействии. Анализ уровней усиления шума каскадных фильтров нижних частот на звеньях прямой, канонической и оптимальной формы посвящена работа [2], где также сопоставлены эвристический и оптимальный методы полюсно-нулевого упорядочения для минимизации этих уровней. В [3] проанализированы отношения шум/сигнал и значения длины слова коэффициентов каскадных полосовых фильтров на звеньях прямой и нормальной формы, а также фильтров на основе фазовых цепей на звеньях прямой и волновой (на базе адаптеров из [1]) формы. Для минимизации длины слова коэффициентов использован однопараметрический алгоритм вариации исходных

параметров [4], а для минимизации отношения шум/сигнал в каскадных фильтрах применена эвристическая процедура [5].

В данной статье расширены исследования, выполненные в [3] для БИХ-фильтров с заданными требованиями к АЧХ. Рассматриваются четыре варианта их синтеза, которым соответствуют две каскадные структуры на звеньях прямой и оптимальной формы, а также две структуры на основе фазовых цепей на звеньях прямой и волновой (на адаптерах из [6]) формы. Предполагается, как и в [1-3], что все структуры оперируют с фиксированной точкой. Синтез фильтров включает минимизацию длины слова коэффициентов и отношения шум/сигнал теми же методами что и в [3]. Проводится анализ всех четырех структур фильтров по ряду параметров шума, границе предельного цикла и длине слова коэффициентов. Синтез выполняется с помощью программных средств DIFID (РАДИС Лтд) для конкретных требований к неравномерности и ослаблению АЧХ полосовых фильтров десятого порядка в широком диапазоне изменения граничных частот при заданной полосе пропускания и фиксированном коэффициенте прямоугольности.

### **БИХ-фильтры в условиях конечной арифметики**

Перед описанием обсуждаемых структур БИХ-фильтров кратко изложим общие проблемы их проектирования в условиях конечной арифметики. К числу таковых относятся проблемы поиска допустимой характеристики фильтра, минимизации длины слова коэффициентов, масштабирования, минимизации отношения шум/сигнал в каскадных фильтрах, оценки амплитуды предельного цикла и обеспечения устойчивости при вынужденном воздействии.

#### ***Поиск допустимой характеристики фильтра***

Синтез БИХ-фильтров заданной структуры с квантованными коэффициентами сводится к задаче целочисленного нелинейного программирования. Обсудим, не вдаваясь в детали конкретных алгоритмов, общие подходы, связанные с поиском допустимой характеристики фильтра, в частности АЧХ.

В инженерной практике часто используется метод простого округления (ПО), согласно которому сначала аналитически или численно решается задача аппроксимации необходимой характеристики фильтра. В результате определяются непрерывные коэффициенты фильтра, затем, если требуется, они пересчитываются в коэффициенты выбранной структуры и далее квантуются (округляются) до желаемой длины слова. При этом полученная характеристика фильтра может оказаться недопустимой. Однако это не означает, что при данной длине слова не существует допустимого решения. Тем не менее такой подход вполне оправдан и находит применение, когда требования к фильтрам не являются жесткими, а желаемая длина слова сильно не лимитирована, например, не превышает 16 бит.

Другой подход основан на методе вариации коэффициентов (ВК). В этом случае в качестве исходных берутся квантованные коэффициенты фильтра заданной структуры, полученные методом ПО или выбранные по каким-то другим соображениям. Далее для получения допустимой характеристики фильтра осуществляется их вариация на квантованном множестве значений согласно тому или иному алгоритму. Квантованные коэффициенты могут быть представлены дробными или целыми числами. Лишь алгоритм полного перебора этих коэффициентов для которого, особенно при жестких требованиях к характеристикам фильтров, могут потребоваться чрезмерные вычислительные затраты, исчисляемые часами работы компьютера, гарантирует нахождение глобально оптимального решения. Однако известны и другие алгоритмы ВК, которые могут давать решения близкие к оптимальным за существенно меньшее время.

Еще один подход основан на методе вариации исходных параметров (ВИП). В методе ВИП вместо вариации искоемых коэффициентов варьируются исходные параметры необходимые для расчета фильтра, например, неравномерность АЧХ, граничные частоты и др. При этом в отличие метода ВК предполагается обязательное наличие аналитической или численной процедуры аппроксимации характеристики фильтра с непрерывными коэффициентами, которые являются явными или неявными функциями исходных параметров. Введение округления коэффициентов в эту процедуру делает эти

функции дискретными и предопределяет возможные алгоритмы поиска допустимого решения. Число исходных параметров не зависит от порядка фильтра и его структуры, а определяется видом аппроксимации и типом фильтра (нижних частот, полосовой или др.). Малое число варьируемых параметров является важным преимуществом метода ВИП в сравнении с методом ВК, в котором число варьируемых коэффициентов зависит от структуры фильтра и растет с увеличением его порядка.

### ***Минимизация длины слова коэффициентов***

Минимально необходимую длину слова коэффициентов обычно определяют итеративно, начиная с некоторого начального значения с последующим, если потребуется, ее увеличением до тех пор, пока характеристика фильтра в процессе поиска решения с помощью методов ПО, ВК или ВИП не станет допустимой или наилучшей в смысле того или иного критерия оптимальности. Методы ВК и ВИП дают близкие результаты (различие в длине слова коэффициентов составляет 0-1 бит). В сравнении с ПО метод ВИП в конкретных случаях позволяет уменьшить длину слова вплоть до 50% [4].

### ***Масштабирование***

Для уменьшения вероятности переполнения и максимизации динамического диапазона полезный сигнал в узлах суммирования той или иной структуры фильтра необходимо поддерживать на определенном уровне. Это осуществляется введением в структуру масштабных множителей, которые определяются так, чтобы получить заданное значение  $L_p$ - или  $l_p$ -нормы, соответственно для всех промежуточных передаточных функций или импульсных характеристик, подвергающихся масштабированию. Обычно для  $L_p$ -нормы значение  $p=\infty$  или 2, а для  $l_p$ -нормы -  $p=1$  или 2. Масштабирования с помощью  $L_2$ - и  $l_2$ -нормы идентичны, но отличаются вычислительными аспектами.

Часто называемое  $L_p$ - или  $l_1$ -масштабирование может быть выполнено как в процессе поиска, так и после нахождения фильтра с допустимой характеристикой. В первом случае масштабные множители учитываются в некоторых коэффициентах передаточной функции фильтра, а во втором – вводятся в его структуру. В зависимости от структуры или по другим соображениям применяется один из этих подходов. Масштабные множители могут быть заданы равными степени числа два.

Выбор  $L_p$ - или  $l_1$ -нормы и ее значения зависит от вида сигнала, обрабатываемого фильтром. Для узкополосных, широкополосных и произвольных сигналов используют  $L_\infty$ -,  $L_2$ - и  $l_1$ -норму, соответственно. Заметим, что на практике для того чтобы задать значение нормы может потребоваться математическое или даже физическое моделирование. Однако в общем случае ни один из способов масштабирования не устраняет возможность переполнения при произвольных начальных значениях переменных внутри БИХ-фильтра.

### ***Минимизация отношения шум/сигнал в каскадных фильтрах***

Уровнем шума на выходе фильтра, обусловленным квантованием результатов арифметических действий можно легко управлять, уменьшая шаг квантования или иначе увеличивая длину слова переменных в фильтре. Однако это не всегда возможно, например, при желании использования конкретной элементной базы с ограниченной точностью обработки. Поэтому можно определить пиковое значение спектральной плотности мощности шума или его дисперсию и подобрать структуру фильтра с минимальным значением одного из этих параметров с тем, чтобы попытаться удовлетворить требуемой точности обработки. В каскадных фильтрах эти параметры дополнительно минимизируют с помощью процедуры полностью-нулевого упорядочения. Поскольку округление коэффициентов (особенно при их малой длине слова) влияет на уровни шума и полезного сигнала на выходе фильтра, а цепи прохождения шума и сигнала в фильтре различны, то для получения наилучшего результата желательно минимизировать отношение шум/сигнал, а не уровень шума. Уменьшение отношения шум/сигнал на 6 дБ позволяет сэкономить 1 бит в длине слова переменных внутри фильтра.

Известно, что использование динамического программирования дает возможность найти оптимальный вариант полностью-нулевого упорядочения в каскадных фильтрах, но требует

существенных временных затрат на компьютере, хотя и значительно меньших чем при использовании процедуры полного перебора. Поэтому были разработаны эвристические алгоритмы (см. работы [2, 5] и ссылки в них) приводящие к очень хорошим результатам за приемлемое время, благодаря малому числу вариантов упорядочения.

### ***Оценка амплитуды предельного цикла квантования***

В БИХ-фильтрах квантование переменных может привести к неустойчивости, проявляемой в виде предельного цикла, уровень которого, как и уровень шума квантования легко уменьшить, увеличивая длину слова переменных в структуре фильтра. Амплитуда, форма и период возникающего предельного цикла квантования могут быть самыми разнообразными в зависимости от структуры фильтра и его коэффициентов, от входного сигнала, начальных значений внутренних переменных, а также от их представления, места и способа квантования.

Обычно сигнал представляется в двоичном дополнительном коде. На практике, как правило, используют три способа квантования сигнала: округление, усечение и усечение по амплитуде. Округления дает нулевое среднее значение ошибки. Усечение легко выполнимо и дает дисперсию ошибки аналогичную округлению, но при ненулевом среднем. Преимущество усечения по амплитуде заключается в свойственном ему подавлении предельных циклов [7,8], но при этом дисперсия ошибки возрастает в несколько раз [7]. Однако, цитируя почти дословно [9], в отличие от округления и усечения, ошибки усечения по амплитуде коррелированы с обрабатываемым сигналом (например, таким как речевой) и основной вклад их сводится к незначительному изменению характеристик фильтра, а не к появлению шума. Заметим, что реализация усечения по амплитуде требует определенных затрат, связанных с необходимостью преобразования отрицательной переменной из дополнительного кода в прямой, последующего усечения и обратного перевода в дополнительный код.

Для произвольной структуры фильтра определить хотя бы максимальную амплитуду возможных предельных циклов затруднительно поскольку это требует больших временных затрат на моделирование. Поэтому для сравнения структур часто используют оценку максимальной амплитуды или иначе границы предельного цикла квантования, независимую от входного сигнала и начальных значений переменных, которую достаточно просто выполнить. Однако фактическая амплитуда может быть много меньше ее границы.

### ***Обеспечение устойчивости при вынужденном воздействии***

В БИХ-фильтрах переполнение в сумматорах может приводить к возникновению колебаний переполнения, т.е. к потере устойчивости фильтра. Важно, чтобы фильтр сохранял устойчивость при вынужденном воздействии [1,7,8,10,11], т.е. чтобы после возникновения переполнения фильтр возвращался к нормальной работе, а не входил в режим колебаний переполнения от которого невозможно избавиться даже при обнулении входного сигнала. Если структура фильтра состоит из отдельных звеньев, то необходимо обеспечить устойчивость для каждого звена. Устойчивость при вынужденном воздействии зависит от структуры звена, позиций его полюсов внутри единичной окружности на  $z$ -плоскости, от характеристики переполнения сумматоров, а также от места, способа и точности квантования переменных. Не для всех звеньев, в частности звеньев прямой формы, можно получить этот вид устойчивости для произвольных позиций полюсов и даже при неограниченной точности переменных, не прибегая к дополнительным мерам [11].

### **Структуры БИХ-фильтров**

Прежде, чем сформулировать задачу синтеза БИХ-фильтров в условиях конечной арифметики и изложить возможный подход к ее решению рассмотрим структуры обсуждаемых фильтров и их особенности. Для простоты записи индекс у коэффициентов передаточной функции звена указывать не будем. Место квантования переменных в структурах звеньев будем отмечать красной пунктирной стрелкой.

### Две каскадные структуры

Передаточная функция каскадного фильтра

$$H(z) = \prod_{i=1}^{N/2} H_i(z),$$

где для упрощения записи порядок фильтра  $N$ - четный.

Фильтр может быть реализован на звеньях второго порядка прямой или оптимальной формы.

Передаточная функция звена прямой формы

$$H_i(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

Масштабные множители здесь учтены в коэффициентах числителя  $H_i(z)$  каждого звена при масштабировании всего фильтра. Соответствующая структура звена, содержащая пять умножителей, приведена на рис.1а.

Передаточная функция звена оптимальной формы

$$H_i(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + d,$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [c_{11} \ c_{12}], \quad \mathbf{I} - \text{единичная матрица размерностью } 2 \times 2.$$

Передаточная функция соответствует описанию в пространстве состояний и содержит девять коэффициентов, что требует столько же умножителей при реализации. Структура звена приведена на рис.1б.

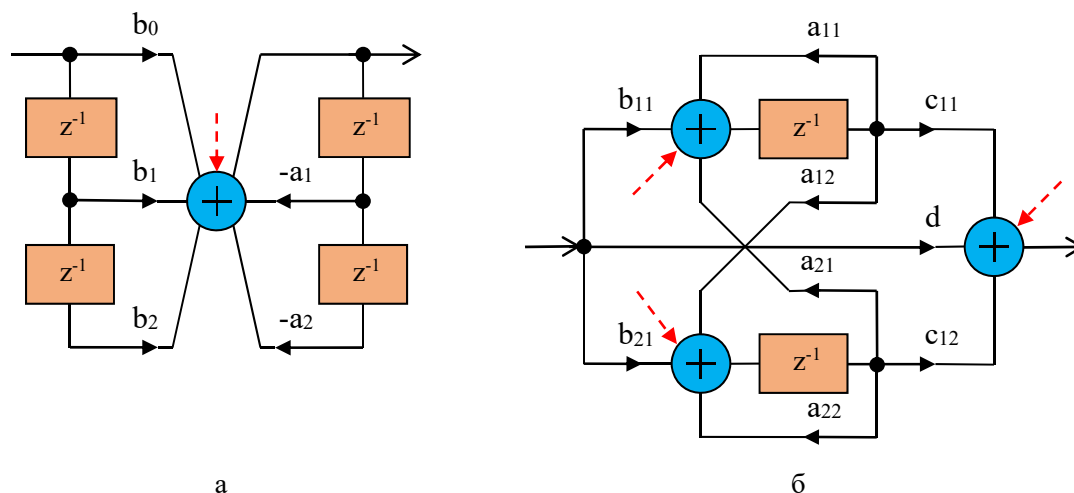


Рис.1. Звенья второго порядка: а) прямой- и б) оптимальной формы

Термин оптимальная форма обусловлен аналитическим расчетом, который обеспечивает минимальный уровень шума при  $L_2$ - масштабировании [12]. Получить аналогичное аналитическое решение для звена при  $L_\infty$ - масштабировании невозможно. Однако при формальной замене в расчетах  $L_2$ - на  $L_\infty$ -норму звено становится очень близким к оптимальному в смысле  $L_\infty$ - масштабирования

[12,13]. Этот факт используется на практике. Применение звеньев оптимальной формы конечно не отменяет масштабирования каскадного фильтра в целом. Заметим, также что масштабирование влияет на все коэффициенты каждой  $H_i(z)$ , исключая  $a_{11}$  и  $a_{22}$ .

После квантования коэффициентов обсуждаемое звено даже для случая  $L_2$ -нормы, строго говоря, не будет оптимальным. Поэтому слово оптимальное следовало бы взять в кавычки как при  $L_2$ -масштабировании с квантованием коэффициентов, так и при  $L_\infty$ -масштабировании с или без квантования коэффициентов.

Заметим, что использование специальной техники расчета [13,14] приводит к пяти умножителям в звене на рис.1б за счет того, что другие множители заменяются элементами сдвига. При этом характеристики звена не искажаются, а его шумовые свойства примерно сохраняются. Однако в данной статье этот интересный вариант звена рассматривать не будем.

### Две структуры на основе фазовых цепей

Фильтры на основе фазовых цепей часто называют фильтрами на основе параллельного соединения двух фазовых цепей или фильтрами в виде суммы двух фазовых цепей. Каждая фазовая цепь обычно соответствует каскаду фазовых звеньев не выше второго порядка, причем если звенья реализованы на базе адаптеров, то фильтр называют решетчатым (мостовым) волновым фильтром [6,9].

Передаточная функция фильтра в виде суммы двух фазовых цепей

$$H(z) = 0,5 \left[ \prod_{i=1,3,\dots} P_i(z) \pm \prod_{i=2,4,\dots} P_i(z) \right]$$

и в частности

$$H(z) = 0,5 [P_1(z) \pm 1] .$$

Для фильтров нижних и верхних частот, соответственно знак плюс и минус в этих выражениях, функция  $H(z)$  имеет нечетный порядок равный 1,3,5,... При этом фазовая цепь  $P_i(z)$  с нечетными  $i$  содержит звено 1-го порядка. Количество звеньев в структуре фильтра равно  $(N+1)/2$ . Для полосовых и режекторных фильтров, соответственно знак минус и плюс в этих выражениях, функция  $H(z)$  имеет четный порядок равный 2,6,10,... В этом случае количество звеньев в структуре равно  $N/2$ .

В фильтрах этого типа автоматически  $\|H\|_\infty=1$ ,  $\|H\|_2<1$  и  $\|P_i\|_\infty=\|P_i\|_2=1$  для всех  $i$ . При этом масштабирование фильтра сводится к масштабированию его звеньев. Умножение на коэффициент 0,5, фигурирующий в  $H(z)$ , осуществляется на входах сумматора (вычитателя) без последующего квантования.

Фильтр может быть реализован на фазовых звеньях второго порядка прямой или волновой формы.

Передаточная функция фазового звена прямой формы

$$P_i(z) = \frac{a_2 + a_1 z^{-1} + z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} .$$

Звено можно выполнить на четырех или двух умножителях. Во втором случае внутренние переменные должны иметь защитный бит для устранения переполнений перед умножением на коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$ . Структура фазового звена на двух умножителях представлена на рис.2а. Здесь  $L_2$ - и  $L_\infty$ -масштабирование автоматически обусловлено самой структурой звена.

Передаточная функция фазового звена волновой формы

$$P_i(z) = \frac{-\gamma_1 + \gamma_2(\gamma_1 - 1)z^{-1} + z^{-2}}{1 + \gamma_2(\gamma_1 - 1)z^{-1} - \gamma_1 z^{-2}} .$$

Звено можно реализовать на двух адаптерах. Его структура на адаптерах Ад.1 и Ад.5 представлена на рис.2б и содержит два умножителя. Возможные конфигурации адаптеров показаны на рис.3 [6]. Выбор конфигурации, как видим, зависит от значения  $\gamma$ , по которому определяется коэффициент  $\alpha$  в адаптере. Под  $\gamma$  подразумевается  $\gamma_1$  или  $\gamma_2$ , а под  $\alpha$  – соответственно коэффициенты  $\alpha_1$  или  $\alpha_2$ . В звене внутренние переменные должны иметь защитный бит для устранения переполнений на входе умножителей [6,9].

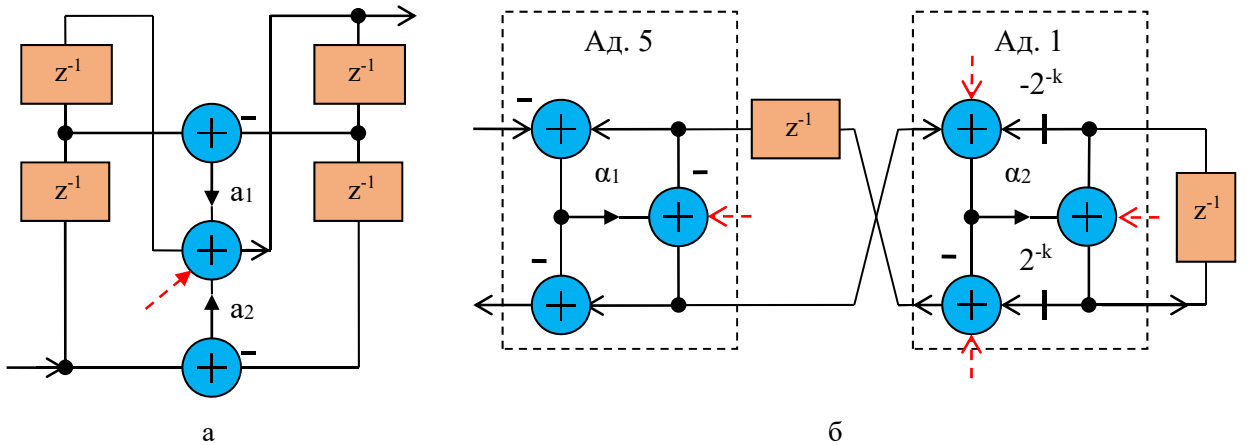


Рис.2. Фазовые звенья второго порядка: а) прямой и б) волновой формы

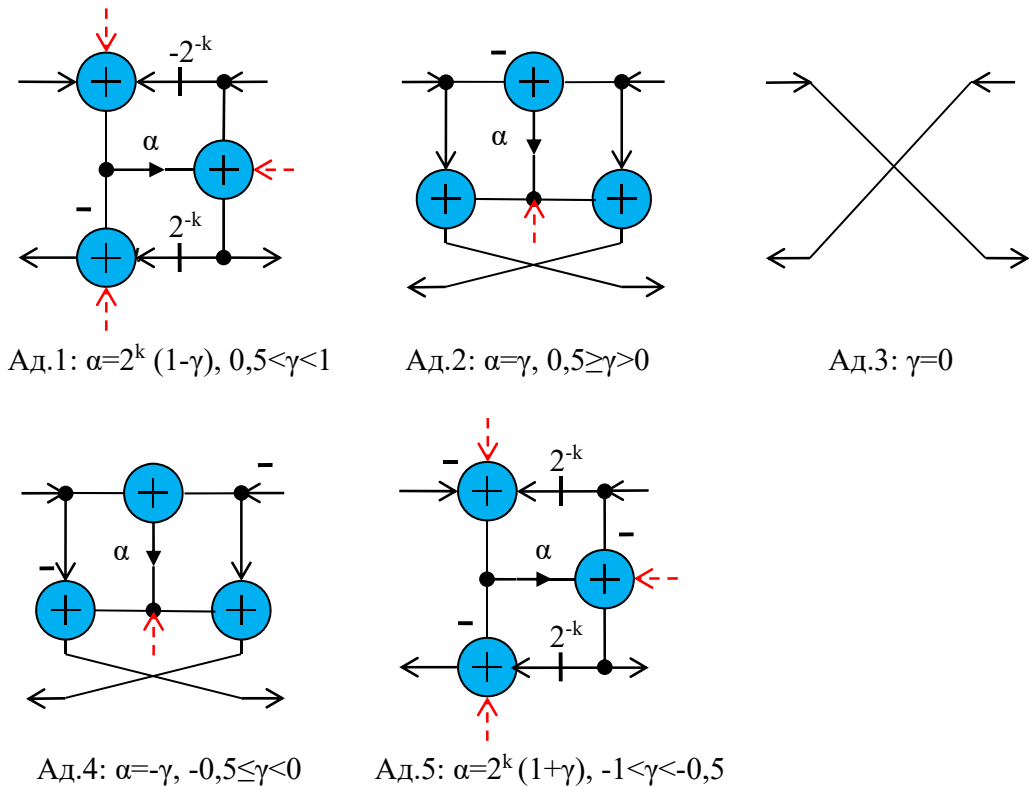


Рис.3. Структуры адаптеров Ад.1-Ад.5

В принципе для фазовых звеньев на адаптерах рис.3 операцию  $L_\infty$ -масштабирования можно не проводить, т.к. для всех узлов суммирования максимальные коэффициенты передачи меньше или равны единице [6]. Однако в случае узкополосных фильтров для внутреннего адаптера (Ад.1 на рис.2б), причем если это структура Ад.1 или Ад.5, максимальный коэффициент передачи от входа звена до выхода сумматора в середине адаптера, оказывается много меньше единицы, что увеличивает отношение шум/сигнал. Для устранения этого в адаптеры вводятся масштабные множители  $2^k$  и  $2^{-k}$ . Первый вводится в коэффициент  $\alpha$ , как показано в подрисуночном пояснении на рис.3, а второй – в структуру адаптера – жирная черта и число  $2^{-k}$  на рис.2б и рис.3. Множители равные степени числа два позволяют сохранить звено фазовым. Значение  $k$  для отдельных звеньев фильтра могут как совпадать, так и отличаться. Масштабирование выполняется после того как найдены квантованные коэффициенты фильтра.

### Задача синтеза БИХ-фильтров и ее решение

Задачу синтеза БИХ-фильтров со стандартными требованиями к АЧХ сформулируем как

$$M \rightarrow \min, \\ \text{шум/сигнал} \rightarrow \min$$

при условиях

$$\Delta \hat{a} \leq \Delta a_{\max}, \hat{a}_0 \geq a_{0\min} \text{ и } L_p = 1 \text{ (или } l_1 = 1)$$

где  $M$  – длина слова (дробной части) коэффициентов в битах, которой соответствует шаг квантования  $q = 2^{-M}$ ;  $\Delta \hat{a}$  и  $\hat{a}_0$  – выраженные в децибелах неравномерность и минимальное ослабление АЧХ фильтра в номинальных полосах пропускания и задерживания, а  $\Delta a_{\max}$  и  $a_{0\min}$  – заданные предельно допустимые значения этих параметров.

Номинальные полосы определяются по заданным номинальным граничным частотам  $f_{in}$  при  $i=1,2$  для фильтров нижних и верхних частот и  $i=1-4$  для полосовых и режекторных фильтров. При этом  $f_{1n} < f_{2n} < f_{3n} < f_{4n} < f_r/2$ , где  $f_r$  – частота дискретизации.

Итак, согласно сформулированной задаче, требуется синтезировать фильтр конкретной структуры с заданными допусками на АЧХ. При этом необходимо получить минимальную длину слова коэффициентов, а для каскадной структуры – и минимальное отношение шум/сигнал на выходе фильтра. Кроме того, в любой промежуточной точке, относительно которой выполняется масштабирование в фильтре, выбранная норма должна быть близка к заданному значению равному единице.

Для минимизации длины слова коэффициентов используем простой однопараметрический алгоритм ВИП [4] применительно к фильтрам Золотарева-Кауэра. Варьируемым параметром в нем является исходная неравномерность АЧХ в полосе пропускания  $\Delta a$ , а исходные граничные частоты фиксированы и равны  $f_i = f_{in}$ . Диапазон вариации устанавливается в пределах  $\Delta a_{\min} \leq \Delta a \leq \Delta a_{\max}$ . При  $\Delta a < \Delta a_{\min}$  нарушается требование по ослаблению АЧХ в полосе задерживания для фильтра с непрерывными коэффициентами. Указанный диапазон содержит конечное число интервалов разной длины, каждому из которых соответствует свой вектор квантованных (округленных) коэффициентов. Для соседних интервалов векторы отличаются лишь одним из коэффициентов и причем на величину  $q$ . Этот факт позволяет в процессе поиска решения определять и корректировать текущий шаг вариации так, чтобы на каждом интервале делать лишь одну проверку АЧХ на допустимость. Процесс вариации выполняется при  $M = 1, 2, 3$  и т.д. до тех пор, пока для некоторых значений  $\Delta a$  и  $M$  не будет найдено допустимое решение.

Для рассматриваемых каскадных фильтров на каждом интервале выполняется эвристическая процедура полюсно-нулевого упорядочения [5], которая при произвольном порядке фильтра сводится к перебору всего пяти “хороших” вариантов упорядочения, отличающихся расстановкой звеньев в зависимости от добротности их полюсов. При этом полюсно-нулевая пара звена формируется по известному правилу [2], а именно ближайший к единичной окружности полюс объединяется в пару с ближайшим к нему нулем и т.д. для остальных полюсов и нулей. Для каждого упорядочения



выполняется масштабирование. На каждом интервале возможны две ситуации: 1) решения нет, тогда осуществляется переход к следующему интервалу, 2) имеется несколько решений, но максимум пять - по числу вариантов упорядочения, тогда из них выбирается решение с наименьшим отношением шум/сигнал.

Относительно используемых алгоритма ВИП и процедуры полюсно-нулевого упорядочения отметим следующее:

- Исследование алгоритмов ВИП, выполненное в [4], для 70-ти каскадных фильтров нижних частот Золотарева-Кауэра на звеньях прямой формы со случайно сгенерированными требованиями показывает, что в 67% случаев простой однопараметрический алгоритм дает идентичные значения длины слова коэффициентов в сравнении с более сложным трехпараметрическим алгоритмом ВИП, в котором наряду с неравномерностью варьируются две граничные частоты. В остальных случаях простой алгоритм дает большие значения длины слова, но не более чем на 1-2 бита, причем чаще на 1 бит.
- В [2] применительно к каскадным фильтрам нижних частот 8-го порядка на звеньях прямой и оптимальной формы при  $L_\infty$ -масштабировании (коэффициенты не квантованы) с помощью динамического программирования получены минимальные значения усиления шума квантования для ряда граничных частот и представлены соответствующие графики, а для трех частот из этого ряда приведены найденные полюсно-нулевые упорядочения и значения усиления. Установлено, что эвристическая процедура [5] приводит к результатам, которые очень хорошо согласуются с точками на этих графиках, а в трех случаях совпадают по значениям усиления и упорядочениям для фильтров на звеньях оптимальной формы.

### Контролируемые параметры фильтров

Представим необходимые соотношения для оценки параметров, часть из которых контролируется в процессе поиска решения поставленной задачи синтеза фильтров, а другая, большая часть, - после его окончания.

#### Оценки параметров характеристик

Неравномерность АЧХ в номинальной полосе пропускания

$$\Delta \hat{a} = -20 \lg \frac{H_{\min}}{H_{\max}} = -20 \lg(1 - \delta_p),$$

где  $H_{\min}$  и  $H_{\max}$  минимальное и максимальное значение АЧХ или иначе модуля коэффициента передачи  $|H(z)|$ .

Минимальное ослабление АЧХ в номинальной полосе задерживания

$$\hat{a}_0 = -20 \lg \frac{H'_{\max}}{H_{\max}} = -20 \lg \delta_s,$$

где штрих означает соответствие полосе задерживания.

Взвешенная максимальная ошибка аппроксимации АЧХ

$$e_{\infty} = \max \left\{ \frac{\delta_p}{\delta_{p\max}}, \frac{\delta_s}{\delta_{s\max}} \right\},$$

где  $\delta_{p\max} = 1 - 10^{-\Delta a_{\max}/20}$ ,  $\delta_{s\max} = 10^{-a_{0\min}/20}$ . Заметим, что если  $e_{\infty} \leq 1$ , то  $\Delta \hat{a} \leq \Delta a_{\max}$ ,  $\hat{a}_0 \geq a_{0\min}$ , поэтому в процессе поиска допустимого решения проще контролировать ошибку  $e_{\infty}$ .

Нелинейность ФЧХ  $\varphi(f)$  в номинальной полосе пропускания

$$\Delta\varphi = (\delta_{\max}^+ - \delta_{\min}^-)/2,$$

где  $\delta(f) = \varphi(f) - 360K \cdot (f - f_x)$  - характеристика отклонения  $\varphi(f)$  от прямой линии с наклоном  $K$ , который подбирается так, чтобы  $\Delta\varphi$  была минимальной;  $\delta_{\max}^+$  определяется для  $\delta(f) \geq 0$ , а  $\delta_{\min}^-$  - для  $\delta(f) < 0$ ; частота  $f_x$  равна 0,  $f_r/2$  и  $f_0 = (f_{2n} + f_{3n})/2$  соответственно для фильтров нижних, верхних частот и полосовых, а для режекторных фильтров  $f_x$  равна 0 или  $f_r/2$ . Все функции частоты  $f$  выражены здесь в градусах.

Неравномерность ХГВЗ  $\tau(f)$  в номинальной полосе пропускания

$$\Delta\tau = \tau_{\max} - \tau_{\min},$$

где  $\tau_{\min}$  и  $\tau_{\max}$  минимальное и максимальное значение.

Промежуточные нормы

$$\|V_i\|_{\infty} = \max |V_i(z)|,$$

$$\|V_i\|_2 = \left( \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} V_i(z) V_i(z^{-1}) \frac{dz}{z} \right)^{1/2}$$

или

$$\|v_i\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |v_i(n)|,$$

которые рассчитываются для всех передаточных функций  $V_i(z)$  или импульсных характеристик  $v_i(n)$  определяемых от входа фильтра до каждой  $i$ -ой точки относительно которой выполнено масштабирование с помощью  $L_{\infty}$ ,  $L_2$  - или  $l_1$ -нормы.

Полезно также знать промежуточные максимальные коэффициенты передачи  $\max |V_i(z)|$  при  $L_2$ - или  $l_1$ -масштабировании, которые, как и при  $L_{\infty}$ -масштабировании, определяются в основной полосе частот ( $0 \leq f \leq f_r/2$ ), исключая полосу задерживания.

В приведенных соотношениях минимальные и максимальные значения параметров АЧХ, ФЧХ и ХГВЗ оцениваются на дискретном ряде частот.

### Оценки параметров шума и амплитуды предельного цикла

Положим, что фильтр оперирует переменными с фиксированной точкой в дополнительном коде, ограниченными по модулю единицей. Используем широко известные вероятностную и детерминированную модели квантования переменных в фильтре. В первом случае имеем дело с шумом квантования, а во втором – с детерминированными ошибками, которые также трактуют как предельный цикл квантования. Под квантованием будем понимать округление или усечение переменных.

Введем передаточные функции  $G_i(z)$  и соответствующие ей импульсные характеристики  $g_i(n)$ , которые определим от  $i$ -ой точки или иначе от  $i$ -го источника квантования переменных в фильтре до его выхода. Приведем соотношения для оценки параметров, связанных с квантованием.

Для вероятностной модели квантования определим ряд параметров.

Усиление мощности шума

$$K_P = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = \sum_i \|G_i\|_2^2,$$

где  $\sigma^2$  – мощность (дисперсия) шума на выходе фильтра обусловленная всеми источниками квантования переменных внутри фильтра,  $\sigma_0^2 = 2^{-2B}/3$  – мощность шума каждого источника,  $B$  – длина слова переменных, включающая знак, сохраняемая после квантования.

Усиление постоянной составляющей (ПС) шума

$$K_C = \frac{C_G}{m_0} = \left| \sum_i G_i(z) \Big|_{z=1} \right|, m_0 \neq 0,$$

где  $C_G$  – ПС шума на выходе фильтра, обусловленная всеми источниками квантования (усечения) внутри фильтра,  $m_0 = 2^{-B}$  – ПС шума каждого источника. В случае округления  $m_0 = 0$  и как следствие  $C_G = 0$ .

Максимум относительной спектральной плотности мощности (ОСПМ) шума на выходе фильтра

$$G'_{\max} = \frac{G_{\max}}{\sigma_0^2} = \max_i \sum |G_i(z)|^2.$$

Здесь максимум определяется на дискретном ряде частот в основной полосе, исключая полосу задерживания. Параметр можно трактовать как *пиковое усиление мощности шума*, обусловленного квантованием переменных внутри фильтра.

Отношение шум/сигнал на выходе фильтра

$$\frac{\text{шум}}{\text{сигнал}} = 10 \lg \frac{r^2 \sigma^2}{\|H\|_p^2} = 10 \lg \frac{r^2 K_P}{3 \|H\|_p^2} - 6B = 10 \lg R - 6B,$$

где  $(\|H\|_p / r)^2$  – мощность сигнала на выходе фильтра при максимальной его амплитуде на входе равной единице,  $r$  – заданное значение пик-фактора входного сигнала,  $p=2$  для случайного сигнала с равномерной СПМ,  $p=\infty$  и  $r=\sqrt{2}$  для гармонического сигнала.

Это выражение соответствует отношению мощностей в децибелах. Удобно в процессе поиска решения поставленной задачи оперировать величиной  $R$ , которая не связана с конкретным значением длины слова  $B$ .

Для детерминированной модели квантования переменных определим лишь один параметр.

Усиление максимальной ошибки квантования или иначе нормированная граница предельного цикла на выходе фильтра

$$A'_{\max} = \frac{A_{\max}}{\nu} = \sum_i \sum_{n=0}^{\infty} |g_i(n)|,$$

где  $\nu$  – максимальная ошибка каждого источника квантования внутри фильтра, причем  $\nu = 2^{-B}$  при округлении переменных и  $\nu = 2^{-B+1}$  при их усечении.

В представленных выше соотношениях верхний предел суммирования по  $i$  определяется количеством точек в которых осуществляется квантование переменных в фильтре.

Определим еще два параметра, которые могут соответствовать как вероятностной, так и детерминированной модели квантования переменных в фильтре. 1

Дополнительное число бит необходимое для компенсации усиления параметра шума или усиления максимальной ошибки квантования

$$\Delta \geq [X/6\text{дБ}] + 1,$$

где  $X = K_p, K_c, G'_{\max}$  или  $A'_{\max}$ , выражены в децибелах, а скобки означают взятие целой части.  
Длина слова внутренних переменных в фильтре

$$B = B' + \Delta,$$

где  $B'$  длины слова, включая знак, на входе фильтра.

Значение  $B$  дает возможность по представленным выше соотношениям вычислить фактические значения мощности, ПС и максимума СПМ шума, отношения шум/сигнал и границы предельного цикла, которые можно при необходимости сколь угодно уменьшить, увеличивая  $B$  за счет увеличения значения  $\Delta$ .

## Программные средства DIFID

Для четырех обсуждаемых структур сформулированную задачу синтеза БИХ-фильтров решим с помощью упомянутых программных средств DIFID основанных на билинейном преобразовании аналогового прототипа. Вначале представим возможности этих средств, а затем приведем примеры синтеза фильтров.

### Возможности

В качестве прототипов используются фильтры Золотарева-Кауэра, Чебышева I и II, Баттерворта, и Бесселя. АЧХ могут соответствовать фильтрам нижних или верхних частот, полосовым или режекторным фильтрам. Порядок фильтра может быть задан или, исключая фильтры Бесселя, рассчитан.

Решения с заданной или минимальной длиной слова коэффициентов находятся с помощью ранее описанного алгоритма ВИП. Предусмотрен режим без применения ВИП и без квантования коэффициентов.

Минимизация отношения шум/сигнал на выходе каскадных фильтров выполняется с помощью ранее поясненной эвристической процедуры полюсно-нулевого упорядочения. Кроме того, можно вручную задать желаемое упорядочение.

Для каскадных фильтров на звеньях прямой или канонической формы применяется  $L_\infty$ -,  $L_2$ - или  $l_1$ -масштабирование, которое выполняется введением масштабных множителей в коэффициенты числителя передаточной функции или в структуру фильтра между звеньями. Эти множители можно задать равными степени числа два. Значение выбранной нормы задается.

Для каскадных фильтров на звеньях оптимальной или нормальной формы применяется  $L_\infty$ - или  $L_2$ -масштабирование, которое осуществляется путем изменения части коэффициентов передаточной функции. Значение выбранной нормы задается.

Для фильтров на основе фазовых цепей на звеньях волновой формы  $L_\infty$ -масштабирование выполняется введением в структуру фильтра масштабных множителей равных степени числа два. Предусмотрен режим без масштабирования. Фазовые звенья реализуются на адаптерах, показанных на рис.3 или на адаптерах из [1]. Значение  $L_\infty=1$ .

Для фильтров на основе фазовых цепей на звеньях прямой формы  $L_\infty$ - масштабирование обусловлено самой структурой фильтра и соответствует  $L_\infty=1$ .

Предусмотрены оценки параметров частотных характеристик, шума, предельного цикла и дополнительного числа бит, которые были представлены выше. Эти параметры вместе с полученными коэффициентами дают достаточно полную информацию о синтезированном фильтре, хотя при необходимости могут быть дополнены параметрами временных характеристик.

### Примеры синтеза

Для иллюстрации решения сформулированной задачи синтеза с помощью DIFID зададимся следующими требованиями к полосовому БИХ-фильтру:

$$\Delta a_{\max}=0,5 \text{ дБ}, a_{0\min}=40 \text{ дБ}, f_{1n}=0,099025, f_{2n}=0,1, f_{3n}=0,105, f_{4n}=0,106025, f_r=1 \text{ и } L_\infty=1.$$

Данным требованиям удовлетворяет фильтр Золотарева-Кауэра 10-го порядка. Результаты синтеза (распечатки), полученные с помощью DIFID, представлены на рис.4-7. Для каскадной структуры на звеньях прямой и оптимальной формы - на рис.4,5, а для структуры в виде суммы двух фазовых цепей на звеньях прямой и волновой формы - на рис.6,7. Заметим, что все частоты даны без размерности, они могут быть по умолчанию в Гц, КГц, МГц и т.д. Поэтому размерность параметров ХГВЗ, которая также не указывается на рис.4-7 и на приведенном далее графике ХГВЗ, соответствует с, мс, мкс и т.д.

```

DIFID - СИНТЕЗ:
Полосовой БИХ-фильтр 10-го порядка
Частота дискретизации 1.000000
Граничные частоты 0.099025, 0.100000, 0.105000, 0.106025

Прототип Золотарева-Кауэра
Билинейное преобразование
Вариация исходных параметров

Каскад звеньев прямой формы
Масштабирование Linf= 1.00
Эвристическое упорядочение нулей: 5 4 3 2 1
полюсов: 5 4 3 2 1

Неравномерность АЧХ, дБ 0.477 [ <= 0.500 ]
Ослабление АЧХ, дБ 40.626 [ >= 40.000 ]
Максимальная ошибка 0.956
Коэффициент передачи 1.003

Неравномерность ХГВЗ 599.951
Максимум ХГВЗ 783.460
Нелинейность ФЧХ, гр. 24.072
Наклон ЛФЧХ -240.945

Усиление мощности шума, дБ 31.595 (6 бит)
Усиление ПС шума, дБ 16.530 (3 бит)
Максимум ОСПМ шума, дБ 56.426 (10 бит)
Граница предельного цикла, дБ 68.211 (12 бит)
Отношение шум/сигнал, дБ 29.834-68

Квантованные коэффициенты с шагом=2^(-10):
i a1[i] a2[i]
1 -1.584960937500000 0.981445312500000
2 -1.604492187500000 0.988281250000000
3 -1.576171875000000 0.988281250000000
4 -1.616210937500000 0.997070312500000
5 -1.577148437500000 0.997070312500000

i b0[i] b1[i] b2[i]
1 0.009765625000000 0.000000000000000 -0.009765625000000
2 0.356445312500000 -0.583984375000000 0.356445312500000
3 0.407226562500000 -0.633789062500000 0.407226562500000
4 0.579101562500000 -0.941406250000000 0.579101562500000
5 0.870117187500000 -1.367187500000000 0.870117187500000

Промежуточные коэффициенты передачи:
( 1.05 1.01 1.02 0.95 1.00 )
  
```

Рис.4. Результаты синтеза каскадного БИХ-фильтра на звеньях прямой формы

```

DIFID - СИНТЕЗ:
Полосовой БИХ-фильтр 10-го порядка
Частота дискретизации 1.000000
Граничные частоты 0.099025, 0.100000, 0.105000, 0.106025

Прототип Золотарева-Кауэра
Билинейное преобразование
Вариация исходных параметров

Каскад звеньев 'оптимальной' формы
Масштабирование Linf= 1.00
Эвристическое упорядочение нулей: 4 3 5 2 1
полюсов: 4 3 5 2 1

Неравномерность АЧХ, дБ 0.492 [ <= 0.500 ]
Ослабление АЧХ, дБ 41.544 [ >= 40.000 ]
Максимальная ошибка 0.984
Коэффициент передачи 1.010

Неравномерность ХГВЗ 553.063
Максимум ХГВЗ 731.369
Нелинейность ФЧХ, гр. 23.754
Наклон ЛФЧХ -236.054

Усиление мощности шума, дБ 29.003 (5 бит)
Усиление ПС шума, дБ 11.731 (2 бит)
Максимум ОСПМ шума, дБ 53.816 (9 бит)
Граница предельного цикла, дБ 68.363 (12 бит)
Отношение шум/сигнал, дБ 27.242-68

Квантованные коэффициенты с шагом=2^(-11):
Звено-1
a11= 0.787597656250000 a12= 0.607910156250000 b11= 0.002441406250000
a21= 0.604492187500000 a22= 0.787597656250000 b21= 0.012207031250000
c11= 0.976562500000000 c12= 0.193359375000000 d = 0.261718750000000
Звено-2
a11= 0.802246093750000 a12= 0.586425781250000 b11= 0.009765625000000
a21= 0.588378906250000 a22= 0.802246093750000 b21= 0.020507812500000
c11= 0.877441406250000 c12= 0.424804687500000 d = 0.514160156250000
Звено-3
a11= 0.791992187500000 a12= 0.584960937500000 b11= 0.020019531250000
a21= 0.604003906250000 a22= 0.791992187500000 b21= 0.009765625000000
c11= 0.449707031250000 c12= 0.899414062500000 d = 0.011230468750000
Звено-4
a11= 0.808105468750000 a12= 0.586425781250000 b11= 0.003417968750000
a21= 0.586425781250000 a22= 0.808105468750000 b21= 0.007812500000000
c11= 0.834960937500000 c12= 0.386718750000000 d = 0.611816406250000
Звено-5
a11= 0.788574218750000 a12= 0.612304687500000 b11= 0.002441406250000
a21= 0.612304687500000 a22= 0.788574218750000 b21= 0.011230468750000
c11= 0.923828125000000 c12= 0.207031250000000 d = 0.815429687500000

Промежуточные коэффициенты передачи:
Вых.1( 1.02 1.01 1.00 0.99 0.99 )
Вых.2( 1.02 1.01 1.00 0.99 0.99 )
Вых.3( 1.02 1.02 1.01 1.01 1.01 )
  
```

Рис.5. Результаты синтеза каскадного БИХ-фильтра на звеньях оптимальной формы

На рис. 4-7 указаны тип БИХ-фильтра (полосовой), его порядок, заданные частота дискретизации и номинальные граничные частоты, способ перехода от прототипа к цифровому фильтру, факт применения алгоритма вариации исходных параметров, структура фильтра, тип масштабирования ( $L_{inf}$  означает  $L_{\infty}$ ) и заданное значение нормы. Затем для каскадных фильтров в рис.4,5 указаны полученные с помощью эвристической процедуры упорядочения нулей и полюсов. Если обратиться к рис.4, то упорядочение полюсов 5 4 3 2 1 означает, что звенья расставлены по возрастанию добротности их полюсов, т.е.  $Q_5 < Q_4 < Q_3 < Q_2 < Q_1$ , а аналогичное упорядочение нулей означает соответствие упомянутому ранее правилу ближайших полюсов и нулей.

Далее следуют полученные параметры АЧХ, ФЧХ, ХГВЗ и шума квантования, нормированная граница предельного цикла, отношение шум/сигнал для гармонического сигнала, шаг квантования коэффициентов фильтра и их значения. Максимальная ошибка АЧХ соответствует  $\epsilon_{\infty}$ , а коэффициент передачи –  $H_{max}$ .

В квадратных скобках приведены заданные предельно допустимые значения параметров. Для параметров шума и границы предельного цикла, выраженных в децибелах, рядом в круглых скобках указано соответствующее число дополнительных бит  $\Delta$ .

В конце рис.4,5 приведены промежуточные максимальные коэффициенты передачи. Для каскадных фильтров на звеньях прямой формы на рис.4. - это коэффициенты передачи от входа фильтра до выхода каждого звена на рис.1а, а - на звеньях оптимальной формы на рис.5 - это коэффициенты передачи от входа фильтра до выхода верхнего (вых.1), нижнего (вых.2) и выходного (вых.3) сумматора каждого звена на рис.1б.

Для фильтра в виде суммы двух фазовых цепей на звеньях волновой формы на рис.7 наряду с коэффициентами указаны типы адаптеров (см.рис3). Цифры в скобках (5) (1) под заголовком “Адаптеры” означают, что звено соответствует адаптерам Ад.5 (с коэффициентом  $\alpha_1$ ) и Ад.1 (с коэффициентом  $\alpha_2$ ) на рис.3. В конце рис.7 представлены промежуточные максимальные коэффициенты передачи от входа фильтра до выхода сумматоров находящихся в середине адаптеров Ад.1 каждого звена на рис.2б. Из-за масштабных множителей равных степени два, эти коэффициенты передачи, которые для фильтров данного типа совпадают с коэффициентами передачи отдельных звеньев, не “дотягивают” до единицы.

```

DIFID-СИНТЕЗ:
Полосовой БИХ-фильтр 10-го порядка
Частота дискретизации 1.000000
Граничные частоты 0.099025, 0.100000, 0.105000, 0.106025

Прототип Золотарева-Каузера
Билинейное преобразование
Вариация исходных параметров

Сумма двух фазовых цепей на звеньях прямой формы
Масштабирование LinF= 1.00

Неравномерность АЧХ, дБ 0.397 [ <= 0.500 ]
Ослабление АЧХ, дБ 41.413 [ >= 40.000 ]
Максимальная ошибка 0.850
Коэффициент передачи 1.000

Неравномерность ХГВЗ 543.564
Максимум ХГВЗ 726.261
Нелинейность ФЧХ, гр. 22.930
Наклон ЛФЧХ -237.766

Усиление мощности шума, дБ 24.897 (5 бит)
Усиление ПС шума, дБ 15.958 (3 бит)
Максимум ОСПМ шума, дБ 49.494 (9 бит)
Граница предельного цикла, дБ 59.930 (10 бит)
Отношение шум/сигнал, дБ 23.136-68

Квантованные коэффициенты с шагом=2^(-12):
i a1[i] a2[i]
1 -1.584960937500000 0.981689453125000
2 -1.575683593750000 0.988281250000000
3 -1.577148437500000 0.996826171875000
4 -1.604736328125000 0.988769531250000
5 -1.616455078125000 0.997070312500000
  
```

Рис.6. Результаты синтеза БИХ-фильтра в виде суммы двух фазовых цепей на звеньях прямой формы

```

DIFID-СИНТЕЗ:
Полосовой БИХ-фильтр 10-го порядка
Частота дискретизации 1.000000
Граничные частоты 0.099025, 0.100000, 0.105000, 0.106025

Прототип Золотарева-Каузера
Билинейное преобразование
Вариация исходных параметров

Сумма двух фазовых цепей на звеньях волновой формы
Масштабирование LinF= 1.00

Неравномерность АЧХ, дБ 0.340 [ <= 0.500 ]
Ослабление АЧХ, дБ 40.586 [ >= 40.000 ]
Максимальная ошибка 0.935
Коэффициент передачи 1.000

Неравномерность ХГВЗ 584.672
Максимум ХГВЗ 767.382
Нелинейность ФЧХ, гр. 24.268
Наклон ЛФЧХ -240.882

Усиление мощности шума, дБ 34.016 (6 бит)
Усиление ПС шума, дБ 24.859 (5 бит)
Максимум ОСПМ шума, дБ 58.387 (10 бит)
Граница предельного цикла, дБ 75.021 (13 бит)
Отношение шум/сигнал, дБ 32.255-68

Квантованные коэффициенты с шагом=2^(-12):
i a1p1[i] a1p2[i] k[i] Адаптеры
1 0.017822265625000 0.400390625000000 1 (5)(1)
2 0.011230468750000 0.415039062500000 1 (5)(1)
3 0.002929687500000 0.420410156250000 1 (5)(1)
4 0.010986328125000 0.386230468750000 1 (5)(1)
5 0.002929687500000 0.381347656250000 1 (5)(1)

Промежуточные коэффициенты передачи:
( 0.67 0.68 0.65 0.69 0.65 )
  
```

Рис.7. Результаты синтеза БИХ-фильтра в виде суммы двух фазовых цепей на звеньях волновой формы

Как видим из рис.4-7 заданным требованиям к АЧХ удовлетворяют все синтезированные фильтры, но при разных значениях шага квантования коэффициентов  $q=2^{-10}$ ,  $2^{-11}$ ,  $2^{-12}$  и  $2^{-12}$ , которые соответствуют значениям длины слова  $M=10$ , 11, 12 и 12 бит. Полученные десятичные коэффициенты можно представить, *деля* их на  $q$ , эквивалентными целыми числами.

В фильтрах на звеньях прямой формы (рис.4,6) для некоторых коэффициентов требуется бит целой части, что создает известные неудобства при практической реализации. Отметим также, что для структуры фильтра на волновых звеньях (рис.7), все коэффициенты меньше единицы и положительные, т.е. беззнаковые. Такое полезное свойство сохраняется при любых требованиях к характеристикам этих фильтров благодаря предписанному выбору адаптеров на рис.3.

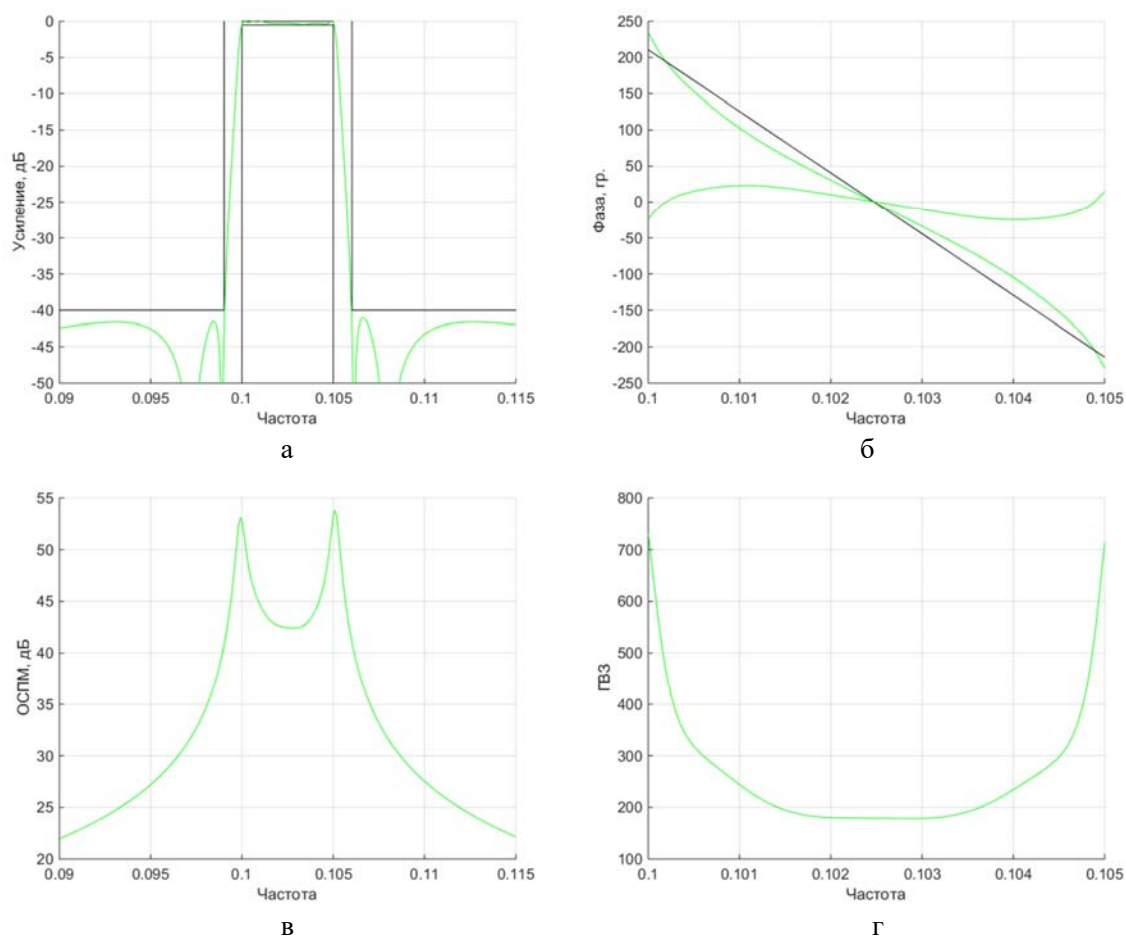


Рис.8. Характеристики каскадного БИХ-фильтра 10-порядка на звеньях оптимальной формы: а) АЧХ, б) ФЧХ, в) ОСПМ и г) ХГВЗ

Представленные результаты на рис. 4-7 дают достаточно полную информацию о синтезированных БИХ-фильтрах и являются самодостаточными, причем без построения АЧХ, ФЧХ, ХГВЗ и ОСПМ. Тем не менее для подтверждения правильности параметров на рис.4-7 эти характеристики были построены. В качестве примера на рис.8 они приведены для каскадных фильтров на звеньях оптимальной формы. Заметим, что на рис.8б помимо собственно ФЧХ фильтра показаны линейная ФЧХ со значением наклона на рис.5 и горизонтально расположенная кривая соответствующая разности этих характеристик. Кривая разности (отклонения), дана с целью подчеркнуть, что ее желательно изображать, причем на отдельном графике, когда необходимо показать численно высокую степень линейности ФЧХ. В данном случае это конечно необязательно.

### Сравнение альтернатив синтеза БИХ-фильтров

Выполним более детальное сопоставление обсуждаемых вариантов синтеза БИХ-фильтров для ряда номинальных граничных частот.

Зададимся следующими требованиями к полосовым фильтрам

$$\Delta a_{\max}=0,5 \text{ дБ}, a_{0\min}=40 \text{ дБ}, \Delta f=f_{3n}-f_{2n}=0,005, f_r=1 \text{ и } L_{\infty}=1.$$

Положим, что здесь граничная частота  $f_{2n}$  изменяется в диапазоне от 0,0006 до 0,25 при условии, что коэффициент прямоугольности АЧХ фиксирован и равен

$$\frac{\Omega_4^2 - \Omega_2 \Omega_3}{(\Omega_3 - \Omega_2) \Omega_4} = \frac{\Omega_2 \Omega_3 - \Omega_1^2}{(\Omega_3 - \Omega_2) \Omega_1} = 1,4$$

где

$$\Omega_i = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi f_{in}}{f_r} \right), i = 1, \dots, 4.$$

Данным требованиям удовлетворяет фильтр Золотарева-Кауэра, минимальный порядок которого  $N=10$ . При этом исходная неравномерность  $\Delta a$  в алгоритме ВИП будет варьироваться в диапазоне от 0,119486 до 0,5дБ для всех значений  $f_{2n}$ . Можно убедиться, что рассмотренные в предыдущем разделе статьи требования соответствуют вновь сформулированным при  $f_{2n}=0,1$ .

На рис.9а-е показаны результаты синтеза обсуждаемых фильтров, а именно зависимости параметров шума, границы предельного цикла и длины слова коэффициентов от номинальной граничной частоты  $f_{2n}$ . Здесь приняты следующие обозначения для структур:

- КПФ - каскад звеньев прямой формы
- КОФ- каскад звеньев оптимальной формы
- ФПФ- сумма двух фазовых цепей на звеньях прямой формы
- ФВФ- сумма двух фазовых цепей на звеньях волновой формы

Отметим, что все графики на этих рисунках, кроме рис.9г, при линейном масштабе по оси абсцисс будут зеркально симметричны относительно граничной частоты  $f_{2n}=0,25$ .

Для каскадных структур КПФ и КОФ в таблице показаны найденные упорядочения полюсов в зависимости от граничной частоты  $f_{2n}$ . Графики на рис.9а-е построены для этих же значений частот. Согласно процедуре [5] для полосового фильтра необходимо перебрать пять вариантов упорядочения

5 4 3 2 1,  
 4 3 5 2 1,  
 2 1 5 4 3,  
 3 2 1 4 5,  
 2 3 5 4 1.

Все эти варианты, причем одни чаще других, фигурируют в таблице. Заметим, что упорядочение может повлиять не только на отношение шум/сигнал, но и на длину слова коэффициентов. Действительно, как показывают расчеты, для обеих каскадных структур использование при поиске решения лишь одного упорядочения 5 4 3 2 1 вместо пяти приводит для некоторых значений  $f_{2n}$  к большей на 1 бит длине слова коэффициентов.



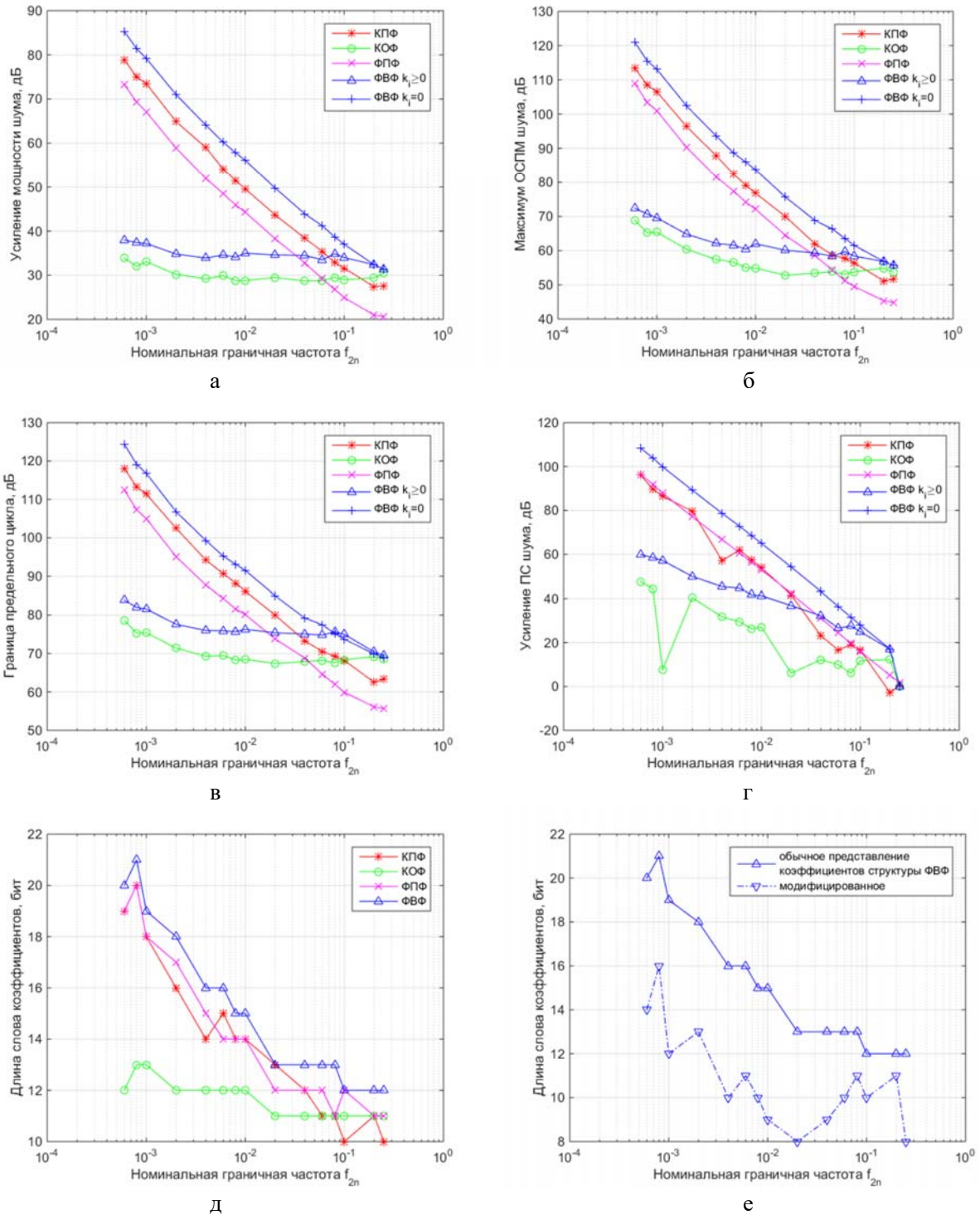


Рис.9. Зависимости параметров четырех структур БИХ-фильтров от номинальной граничной частоты  $f_{2n}$ : а) усиление мощности шума, б) максимум ОСПМ, в) граница предельного цикла, г) усиление ПС шума, д) длина слова коэффициентов и е) длина слова коэффициентов для двух вариантов их представления в структуре ФВФ

Таблица. Найденные упорядочения полюсов в каскадных структурах для ряда граничных частот  $f_{2n}$

$f_{2n}$	Упорядочение	
	КПФ	КОФ
0,0006	2 1 5 4 3	2 3 5 4 1
0,0008		4 3 5 2 1
0,001		3 2 1 4 5
0,002	5 4 3 2 1	5 4 3 2 1
0,004	3 2 1 4 5	4 3 5 2 1
0,006	5 4 3 2 1	2 3 5 4 1
0,008		4 3 5 2 1
0,01		5 4 3 2 1
0,02	4 3 5 2 1	3 2 1 4 5
0,04	3 2 1 4 5	4 3 5 2 1
0,06		
0,08		3 2 1 4 5
0,1	5 4 3 2 1	4 3 5 2 1
0,2	3 2 1 4 5	5 4 3 2 1
0,25	2 3 5 4 1	3 2 1 4 5

На рис.9а-г для структуры ФВФ представлены два варианта кривых - с масштабированием  $k_i \geq 0$  и без него  $k_i = 0$ . Обнаружено, что фазовым звеньям в этой структуре соответствуют следующие комбинации адаптеров:

Ад.5, Ад.1 (как на рис. 2б) - при  $0,0006 \leq f_{2n} \leq 0,1$ ,  
 Ад.5, Ад.2 - при  $f_{2n} = 0,2$ ,  
 Ад.5, Ад.4,  $i=1-4$  и Ад.5, Ад.2,  $i=5$  - при  $f_{2n} = 0,25$ .

\ На рис.9а-в показаны зависимости усиления мощности шума, максимума ОСПМ и границы предельного цикла от частоты  $f_{2n}$ . Напомним, что значение этих параметров желательно иметь минимальными.

Как видим, взаимное расположение кривых от рисунка к рисунку примерно сохраняется. При этом для частот от 0,0006 в плоть до 0,03-0,04 преимущественно, в большей степени на низких частотах (в десятки децибел), обладают структуры КОФ и ФВФ ( $k_i > 0$ ) в сравнении с остальными. Преимущество КОФ перед ФВФ ( $k_i > 0$ ) для всего диапазона граничных частот невелико. Кривые для КОФ и ФВФ в разной степени близки к горизонтальной линии. В тоже время кривым для трех других структур свойственен сильный наклон. Во всем диапазоне граничных частот лучшими параметрами среди этих структур обладает ФПФ, а наихудшими - ФВФ ( $k_i = 0$ ). Отличие составляет  $\approx 10$  дБ. Промежуточное положение занимает структура КПФ. Для граничных частот вблизи 0,25 преимущество структуры ФПФ в сравнении со всеми другими составляет более 5-10 дБ.

В некоторых приложениях может оказаться важным уровень ПС шума при усечении переменных. Напомним, что при округлении уровень ПС равен нулю. На рис.9г показаны зависимости усиления ПС шума от граничной частоты  $f_{2n}$ . Хотя относительное расположение кривых отчасти схоже с приведенным на рис.9а-в, но носит более запутанный характер особенно в правой части диапазона граничных частот. Наименьшим усилением ПС для частот от 0,0006 до 0,02 характеризуются структуры КОФ и ФВФ ( $k_i > 0$ ). На частоте 0,25 для всех структур усиление равно 0 дБ. Во всем диапазоне частот усиление изменятся от значения чуть меньше 0 дБ до более чем 40-100 дБ в зависимости от структуры фильтра. Заметим, что полюсно-нулевое упорядочение может сильно повлиять на уровень ПС.

На рис.9д показаны зависимости длины слова коэффициентов от номинальной граничной частоты  $f_{2n}$ . Как видим, увеличение длины слова с уменьшением граничной частоты свойственно всем обсуждаемым структурам фильтров. Для частоты 0,0006 минимальное значение (12 бит) имеет структура КОФ, а максимальное (19-20 бит) - три другие структуры. Наибольшее отличие в значениях длины слова для рассматриваемого диапазона граничных частот свойственно именно этим трем структурам и составляет  $21-10=11$  бит. Подобное отличие для структуры КОФ составляет всего  $13-11=2$  бита. Минимальная длины слова (10 бит) получена для структуры КПФ для частот  $f_{2n}=0,1$  и  $0,25$ . Интересно отметить, что если вместо метода ВИП использовать метод ПО, то значения минимальной длины слова окажутся завышенными, а именно в зависимости от  $f_{2n}$  на 1-4 бит для структуры КПФ, на 1-3 бит для - КОФ и на 0-3 бит для структур ФПФ и ФВФ.

На рис.9е приведены две зависимости длины слова коэффициентов от граничной частоты  $f_{2n}$  для структуры ФВФ. Первая соответствует обычному, а вторая модифицированному представлению коэффициентов. Как следует из рисунка длина слова при модификации может быть уменьшена на 1-6 бит в зависимости от значения  $f_{2n}$ . Кривая для обычного представления скопирована с рис.9д. Вторая зависимость требует пояснения. Для этого воспользуемся коэффициентами  $\alpha_{1i}$  и  $\alpha_{2i}$  (все  $k_i=3$ ), полученными при  $f_{2n}=0,02$ , которые равны

$i$	$\alpha_{1i}$	$\alpha_{2i}$
1	0,0181884765625	0,0791015625
2	0,0123291015625	0,09375
3	0,0032958984375	0,099609375
4	0,0103759765625	0,06640625
5	0,002685546875	0,0625

Видно, что длина слова здесь не превышает 13 бит. Эти коэффициенты представимы как

$i$	$\alpha_{1i}$	$\alpha_{2i}$
1	$0,58203125 \times 2^{-5}$	$0,6328125 \times 2^{-3}$
2	$0,7890625 \times 2^{-6}$	$0,75 \times 2^{-3}$
3	$0,84375 \times 2^{-8}$	$0,796875 \times 2^{-3}$
4	$0,6640625 \times 2^{-6}$	$0,53125 \times 2^{-3}$
5	$0,6875 \times 2^{-8}$	$1 \times 2^{-4}$

При такой модификации умножения в фильтре можно выполнить на коэффициенты с длиной слова не более 8 бит. После этого для получения правильного результата необходим сдвиг в сторону младших разрядов согласно новому представлению. То же самое можно проделать для  $\alpha_{1i}$  и  $\alpha_{2i}$  на рис.7 и убедиться, что в этом случае достигается более скромный выигрыш - всего в 2 бита. Модифицированное представление коэффициентов целесообразно при реализации фильтров на заказных СБИС.

## Заключение

Проблемам синтеза БИХ-фильтров в условиях конечной арифметики посвящены многочисленные публикации появившиеся еще в 60-ых годах прошлого столетия. Однако явно не хватает работ, в которых синтезированные фильтры сравнивались бы по всему комплексу их параметров, связанных с квантованием переменных и коэффициентов.

В данной статье рассмотрены четыре варианта синтеза БИХ-фильтров с заданными требованиями к АЧХ. Этим вариантам соответствуют две каскадные структуры на звеньях прямой и оптимальной формы, а также две структуры на основе фазовых цепей на звеньях прямой и волновой формы. Полагается, что все структуры оперируют с переменными представленными в дополнительном коде с фиксированной точкой и используется  $L_\infty$ -масштабирование. Синтез для каждой структуры фильтра включает минимизацию длины слова коэффициентов с помощью алгоритма вариации исходных параметров, а для каскадных фильтров и минимизацию отношения шум/сигнал с помощью эвристической процедуры полюсно-нулевого упорядочения.

Сравнение вариантов синтеза выполнено для конкретных требований к неравномерности и ослаблению АЧХ полосовых фильтров десятого порядка в широком диапазоне изменения граничных частот при заданной полосе пропускания и фиксированном коэффициенте прямоугольности. Для граничных частот, примыкающих к краям основной полосы, каскадные фильтры на звеньях оптимальной формы и фильтры на основе фазовых цепей на звеньях волновой формы имеют значительно лучшие шумовые свойства и меньшие значения границы предельного цикла в сравнении с этими же фильтрами, но на звеньях прямой формы. В области средних граничных частот это свойство проявляется для фильтров на основе фазовых цепей на звеньях прямой формы. Каскадные фильтры на звеньях оптимальной формы имеют значительно меньшую длину слова коэффициентов для граничных частот вблизи краев основной полосы в сравнении с другими тремя структурами фильтров.

Детальное сопоставление структур с учетом их особенностей можно сделать по представленным в статье графикам зависимостей усиления шума квантования, максимума его спектральной плотности мощности и постоянной составляющей, а также зависимостей границы предельного цикла квантования и длины слова коэффициентов от значения граничной частоты полосы пропускания. Замечено, что характер этих зависимостей при смене требований к АЧХ сохраняется, но лишь примерно. Поэтому на практике полезно все же проводить полный анализ параметров рассмотренных и возможно других структур фильтров.

Кратко описанные программные средства DIFID, на базе которых выполнен синтез БИХ-фильтров не являются “застывшими”, они совершенствуются, а их возможности расширяются. Тем не менее средства DIFID можно успешно применить для решения практических и исследовательских задач. Данная статья подтверждает это.

#### Литература

1. Renfors M., Zigouris E. Signal processor implementation of digital all-pass filters. // IEEE Trans. 1988. ASSP-36. No.5. P. 714-728.
2. Dehner G.F. Noise optimized IIR digital filter design - tutorial and some new aspects.// Signal Processing. 2003. Vol. 83. No. 8. P. 1565-1582.
3. Мингазин А.Т. Шум округления и разрядность коэффициентов четырех структур БИХ-фильтров. // 8-я Международная конференция. ‘Цифровая обработка сигналов и ее применение’ (DSPA). 2006. Т.1. С. 139-142.
4. Мингазин А.Т. Минимизация длины слова коэффициентов каскадных цифровых БИХ-фильтров. // 5-я Международная конференция. ‘Цифровая обработка сигналов и ее применение’. (DSPA). 2003. Т.1. С. 75-77.
5. Мингазин А.Т., Зорич А. А. Минимизация шума округления каскадных рекурсивных цифровых фильтров. // Электронная техника. 1992. Сер. 10. № 1,2. С. 37-43.
6. Gazsi L. Explicit formulas for lattice wave digital filters. IEEE Trans. 1985. CAS-32. No.1. P. 68-88.
7. Claasen T.A.C.M, Mecklenbrauker W.F.G., Peek J.B.H. Effects of quantization and overflow in recursive digital filters. //IEEE Trans. 1976. ASSP-24. No. 6. P. 517-529.
8. Butterweck H.-J., Ritzerfeld J., Werter M. Finite word effects in digital filters. // AEU. 1989. Vol. 43. No. 2. P. 76-88.
9. Феттвайс А. Волновые цифровые фильтры: Теория и применение. // ТИИЭР. 1986. Т.74. №2. С. 35-99.
10. Mills W.L., Mullis C.T., Roberts R.A. Digital filter realizations without overflow oscillations.// IEEE Trans. 1978. ASSP-26. No. 4. P. 334-338.
11. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д. Условия абсолютной устойчивости процессов в рекурсивных цифровых фильтрах. // Автоматика и телемеханика. 1979. № 8. С. 76-85.
12. Jackson L. B., Lindgren A. G., Kim Y. Optimal synthesis of second-order state-space structures for digital filters. //IEEE Trans. 1979. CAS-26. No. 3. P. 149-153.
13. Bomar B.W. On the design of second-order state-space digital filters. // IEEE Trans. 1989. CAS-36. No.4. P. 542-552.
14. Barnes C. W. A parametric approach to the realization of second-order digital filter sections. //IEEE Trans. 1985. CAS-32, No.6. P. 530-539.