

РЕАЛЬНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ОБЛАСТИ ДОПУСТИМЫХ ИСХОДНЫХ ПАРАМЕТРОВ БИХ-ФИЛЬТРОВ ЗОЛОТАРЁВА-КАУЭРА

к.т.н. Мингазин А.Т.¹, инж. Гордиенко С.В.¹, проф., д.т.н. Гуреев А.В.²

¹РАДИС Лтд 1, Москва, Зеленоград, E-mail: alexmin@radis.ru, gordienko@radis.ru

²Национальный исследовательский университет "МИЭТ", Москва, Зеленоград,
Email: gureev@org.miet.ru

Аннотация. Область допустимых исходных параметров АЧХ играет важную роль в проектировании частотных цифровых БИХ-фильтров. От выбора исходной точки области зависят параметры частотных и временных характеристик, качество коррекции ХГВЗ/ФЧХ, результаты синтеза фильтров с ограниченной длиной слова коэффициентов, уровни шумов и предельных циклов. Для БИХ-фильтров нижних частот Золотарёва-Кауэра область допустимых исходных параметров представляет собой трехмерную фигуру, математическое описание и качественные конфигурации которой ранее уже неоднократно публиковались. Однако до сих пор реальные конфигурации, построенные для ряда конкретных требований к параметрам АЧХ, не приводились. В данной статье этот пробел устранен; использованы средства трехмерной графики Matlab. Полученные реальные конфигурации области, сильно отличаясь в определенных случаях от их качественных изображений, способствуют лучшему пониманию и правильному решению проблемы выбора исходных параметров при проектировании БИХ-фильтров. Приведенные конфигурации области допустимых исходных параметров, построенные для конкретных требований к АЧХ фильтра четвертого порядка, являются типичными, поскольку при других требованиях изменяются лишь их пропорции.

DSPA, 2016, V.1, March - April, pp.265-271

REAL CONFIGURATIONS OF TOLERANCE INITIAL PARAMETER SPACE OF ZOLOTAREV-CAUER IIR FILTERS

Ph.D. Mingazin A.T.¹, Eng. Gordienko S.B.¹, Prof., Sc.D. Gureev A.V.²

¹RADIS Ltd, Russia, Moscow, Zelenograd

²National Research University Electronic Technology, Russia, Moscow, Zelenograd

Abstract. Tolerance initial parameter space of amplitude response plays an important role in frequency domain digital IIR filter design. Parameters of frequency and time responses, quality of correction of group delay or phase response, limited word-length coefficient filter design, noise and limit cycle levels depend on choice of an initial point in this space. For Zolotarev-Cauer (elliptic) lowpass IIR filters tolerance initial parameter space presents a three-dimensional figure, mathematical description and qualitative configurations of which have been already repeatedly published. However, real configurations, got for a set of certain requirements to parameters of amplitude response, have not been adduced. Into the present paper, this omission has been obviated by means of Matlab 3D graphics tools. While considerably differ from their qualitative depictions in distinct cases, derived real configurations of the space facilitate better understanding and accurate solving of the problem of initial parameter right choice while designing IIR filters. Given configurations of the tolerance initial parameter space, built for the specific requirements to the amplitude response of fourth order filter, are typical since only their proportions change for other requirements.

Введение. Для определения порядка частотных цифровых БИХ-фильтров необходимо задать требования к параметрам АЧХ, таким как допустимая неравномерность в полосе пропускания, допустимое минимальное ослабление в полосе задерживания и номинальные граничные частоты этих полос. Обычно порядок фильтра выбирается так, что требования выполняются с некоторым запасом. Это порождает область допустимых исходных параметров (ДИП), размерность которой зависит от вида аппроксимации (Чебышева, Золотарёва-Кауэра и др.) и типа фильтра (нижних частот или полосовой), а её размеры - от требований к параметрам АЧХ и порядка фильтра [1]. Поскольку расчет фильтра для любой точки области ДИП приводит к допустимой АЧХ, то перед разработчиком стоит проблема выбора подходящей исходной точки. Известна задача улучшения того или иного параметра АЧХ при фиксированных остальных [2-9]. Другие задачи связаны с тем, что от выбора исходной точки в области зависят параметры ХГВЗ/ФЧХ [8,10] и временных характеристик [11], степень выравнивания ХГВЗ или линеаризации ФЧХ с помощью корректоров [10], результаты синтеза фильтров с ограниченной длиной слова коэффициентов [1,10,12], уровни шумов [8,12] и предельных циклов [12].

Для фильтров нижних частот Золотарёва-Кауэра (эллиптических фильтров) область ДИП является трехмерной. В [1] дано математическое описание этой области и приведена ее качественная конфигурация. Позднее в [10,13] были представлены другие качественные конфигурации, обусловленные наличием в области зон предельных переходов к фильтрам Чебышева и Баттерворта. В данной статье для ряда конкретных требований к фильтрам приведены реальные конфигурации области ДИП, которые могут сильно отличаться от их качественных изображений. Вначале дадим описание области удобное для ее построения.

Описание области ДИП. Систему неравенств [13], описывающую область ДИП $S(\Delta a, f_1, f_2)$ для БИХ-фильтров нижних частот Золотарёва-Кауэра, перепишем в виде:

$$\begin{aligned} \Delta a &\leq \Delta a_{\max}, \\ \Delta a &\leq 10 \lg \left(1 + \frac{10^{0,1a_{0\min}} - 1}{\Psi^2(f, f_1, f_2) \Big|_{f=f_2}} \right), \\ \Delta a &\leq 10 \lg \left(1 + \frac{10^{0,1a_{0\min}} - 1}{\Psi^2(f, f_1, f_2) \Big|_{f=f_{2n}}} \right), \\ \Delta a &\leq 10 \lg \left(1 + \frac{10^{0,1\Delta a_{\max}} - 1}{\Psi^2(f, f_1, f_2) \Big|_{f=f_{1n}}} \right), \\ f_2 &< 0,5, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Psi(f, f_1, f_2)$ - характеристическая функция, f_1 и f_2 - граничные частоты полосы пропускания и задерживания, f - текущая частота, f_{1n}, f_{2n} - заданные номинальные значения граничных частот, Δa - неравномерность АЧХ в полосе пропускания, Δa_{\max} и $a_{0\min}$ - заданные допуски по неравномерности и минимальному ослаблению в номинальных полосах.

Описание (1) удобно для построения реальных конфигураций области ДИП. Для упрощения записи зависимость функции $\Psi(\cdot)$ от порядка фильтра N опущена. Значение $\Psi(\cdot) \Big|_{f=f_1} = 1$. Предполагается, что все частоты нормированы относительно частоты дискретизации, а неравномерность и ослабление выражены в децибелах, причем максимум АЧХ в полосе пропускания нормирован к 0 дБ. Очевидно, что $\Delta a > 0$ и $0 < f_1 < f_2$. Полосе задерживания $f_2 \leq f \leq 0,5$ соответствует минимальное ослабление a_0 . По значениям $f_{1n}, f_{2n}, \Delta a_{\max}$ и $a_{0\min}$ оценивается минимальное значение N . Расчет фильтра для любой точки области (1) приводит к допустимой АЧХ с $\Delta \hat{a} \leq \Delta a_{\max}$ и $\hat{a}_0 \geq a_{0\min}$. Здесь символ \wedge - знак соответствия параметров номинальным полосам.

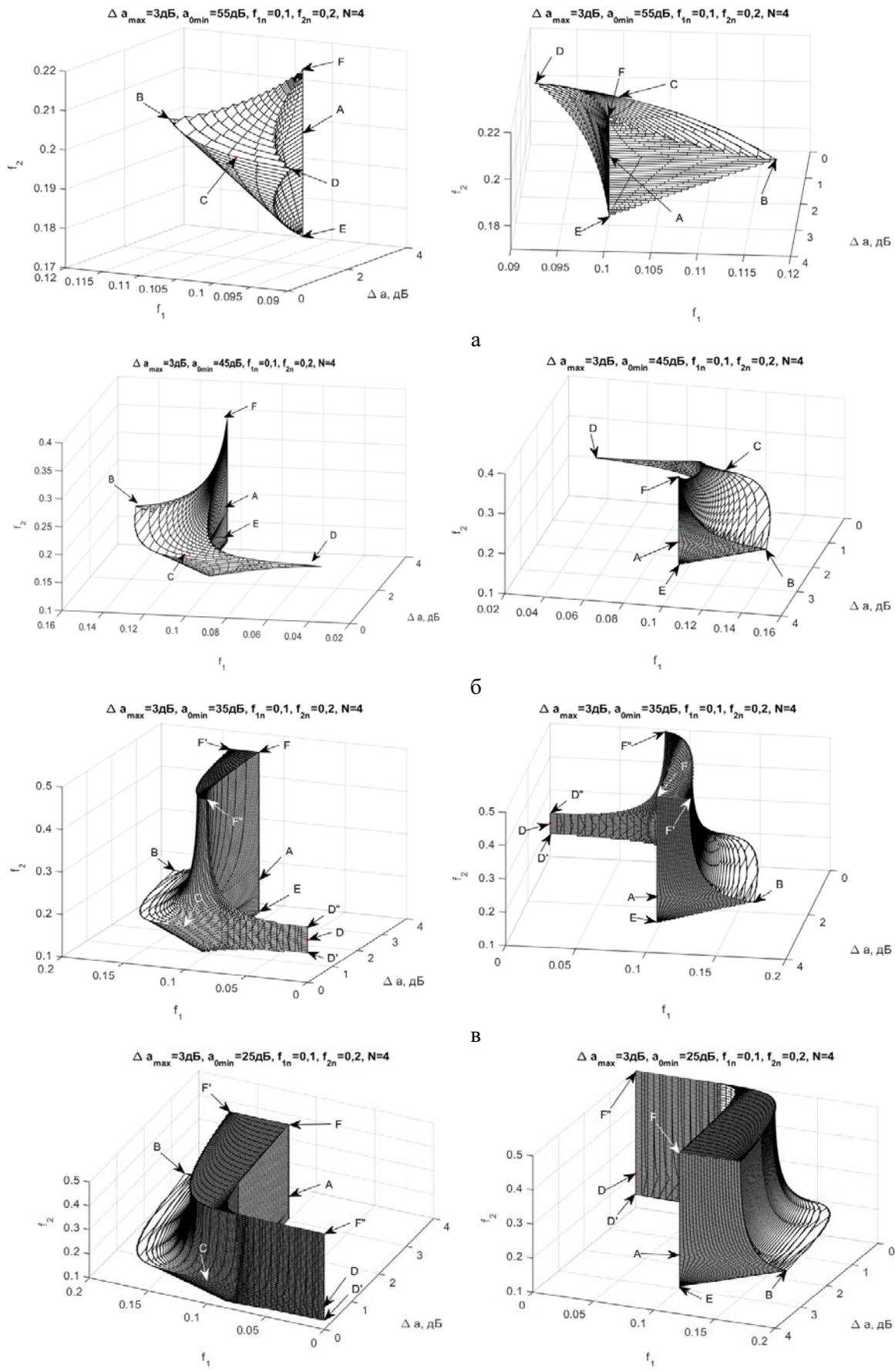
Как видим, область $S(\Delta a, f_1, f_2)$ может быть образована взаимным пересечением двух плоскостей и трёх поверхностей. Для поверхностей, описываемых вторым и третьим соотношением в (1) при знаке равенства в них, ослабление АЧХ в номинальной полосе задерживания $\hat{a}_0 = a_{0\min}$, а для поверхности, описываемой четвертым соотношением в (1) при знаке равенства в нем, неравномерность АЧХ в номинальной полосе пропускания $\Delta \hat{a}_{\max} = \Delta a_{\max}$.

В [13] представлены и пояснены качественные конфигурации области $S(\Delta a, f_1, f_2)$, одна из которых описывается первыми четырьмя соотношениями системы (1), а две другие, обусловленные наличием зон предельных переходов к фильтрам Чебышева и Баттерворта, - всей системой. Далее для ряда конкретных требований к параметрам АЧХ на основе (1) построим средствами трехмерной графики Matlab реальные конфигурации области ДИП.

Реальные конфигурации области ДИП. Реальные конфигурации области ДИП получим для следующих требований к параметрам АЧХ фильтров:

$$\Delta a_{\max} = 3 \text{ дБ}, \quad a_{0\min} = 55, 45, 35 \text{ и } 25 \text{ дБ}, \quad f_{1n} = 0,1 \text{ и } f_{2n} = 0,2. \quad (2)$$

Можно убедиться, что всем четырем значениям $a_{0\min}$ в (2) удовлетворяет с разной степенью запаса фильтр Золотарёва-Кауэра при $N=4$. На рис.1 для этих значений $a_{0\min}$ представлены обла-



Г

Рис.1. Два ракурса области ДИП: а) $a_{0min} = 55$ дБ, б) $a_{0min} = 45$ дБ, в) $a_{0min} = 35$ дБ, г) $a_{0min} = 25$ дБ

сти ДИП, каждая из которых для лучшего восприятия показана в двух ракурсах. Как видим, область ДИП с уменьшением $a_{0\min}$ увеличивается, причем с изменением формы. Характерные точки А, В, С, ... на рис.1 совпадают с введенными для качественных конфигураций в [10,13].

Конфигурации области ДИП на рис.1а и 1б образованы пересечением плоскости и трех поверхностей. Плоской грани ВЕF соответствует первое, а трем поверхностям ВDE, ВDF и DEF - второе, третье и четвертое соотношение в (1) при знаке равенства в них.

Область ДИП, построенная на рис.1а для $a_{0\min}=55$ дБ, схожа с качественной конфигурацией в [13]. Однако область, построенная на рис.1б для $a_{0\min}=45$ дБ, имеет более сложную форму, отличаясь тем, что три поверхности области перед пересечением в точке D образуют протяженный и сильно уплощенный участок, который вплотную примыкает своей плоской поверхностью к воображаемой плоскости $\Delta a = 0$.

Заметим, что при уменьшении ослабления до $a_{0\min}=44,116$ дБ в точках D и F имеют место предельные переходы соответственно к единственному фильтру Чебышева II и единственному фильтру Чебышева I. При этом в точке D справедливо равенство $f_1 = \Delta a = 0$, а в точке F – равенство $f_2 = 0,5$. Этот случай в [13] выделен особо.

Координаты точек А, В, ..., F даны в табл.1, из которой следует, например, что точки А, В, С, D лежат в плоскости $f_2 = f_{2n}$, а точки А и С - на прямой линии $f_1 = f_{1n}$, $f_2 = f_{2n}$. В табл. 1 фигурируют экстремальные параметры $\Delta \hat{a}_{\min}$, Δa_{\min} , $f_{k\min}$, $f_{k\max}$, $k=1,2$ значения которых, рассчитанные по требованиям (2), приведены в табл.2.

Таблица 1. Координаты точек А, В, ..., F области ДИП

Параметр	А	В	С	D	Е	F
Δa	Δa_{\max}		$\Delta \hat{a}_{\min}$	Δa_{\min}	Δa_{\max}	
f_1	f_{1n}	$f_{1\max}$	f_{1n}	$f_{1\min}$	f_{1n}	
f_2	f_{2n}				$f_{2\min}$	$f_{2\max}$

Таблица 2. Экстремальные значения параметров для требований (2)

$a_{0\min}$, дБ	Параметры					
	$\Delta \hat{a}_{\min}$, дБ	Δa_{\min} , дБ	$f_{1\min}$	$f_{1\max}$	$f_{2\min}$	$f_{2\max}$
62	2,92	2,89	0,0999	0,1004	0,1994	0,2002
55	0,76	0,317	0,0906	0,118	0,1737	0,216
45	0,082	7,7e-6	0,0339	0,1445	0,1434	0,3646
35	0,0083	0	0	0,1695	0,1213	0,5
25	0,00083	0	0	0,1883	0,1075	0,5

Реальная конфигурация области ДИП на рис.1в или 1г, как и на рис.1б, отличается от соответствующей качественной конфигурации в [13] протяженным и сильно уплощенным участком. При ослаблении $a_{0\min} < 44,116$ дБ конфигурация на рис.1б претерпевает существенные изменения, как показано на рис.1в при $a_{0\min}=35$ дБ. Здесь обсуждаемый участок области становится более протяженным и уплощенным, еще более примыкающим к воображаемой плоскости $\Delta a = 0$, расширенным по координате f_2 и заканчивается отрезком прямой D'D'', включающим точку D, для которого $f_1 = \Delta a = 0$. Кроме того, появляется плоская грань FF'F'', обусловленная последним соотношением в (2) при знаке равенства в нем. Дальнейшее уменьшение ослабления $a_{0\min}$ приводит к продолжению характерных изменений обсуждаемого участка области, к увеличению площади грани FF'F'' и слиянию точек D'' и F'' при $a_{0\min} \leq 27,945$ дБ. Соответствующая конфигурация области ДИП изображена на рис.1г при $a_{0\min}=25$ дБ, где точка D'' не пока-

зана. На рис.1в и 1г во всех точках отрезков D'D'' и D'F'' имеет место предельный переход к фильтрам Чебышева II, а во всех точках граней FF'F'' - предельный переход к фильтрам Чебышева I. Исключением является точка F'' на рис.1г, где имеет место предельный переход к фильтрам Баттерворта.

На рис.2 на одном графике приведены четыре рассмотренные конфигурации области ДИП без штриховки образующих поверхностей и плоскостей, что позволяет наглядно судить об их относительных размерах и расположении. Заметим, что для всех областей на рис.2 совпадают лишь характерные точки А. При этом каждая большая область содержит в себе меньшую, что похоже на своеобразную матрёшку.

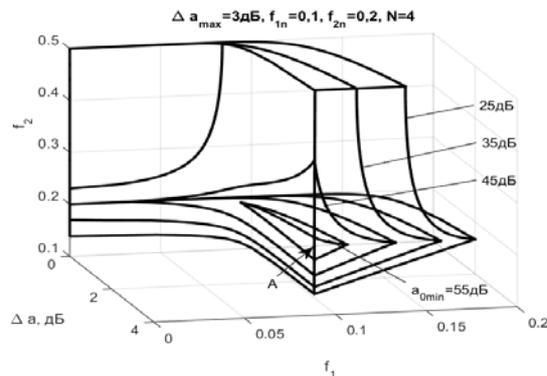


Рис.2. Конфигурации области ДИП для четырех значений a_{0min}

Как видим, при уменьшении a_{0min} на рис.2 область ДИП увеличивается, появляются упомянутые выше зоны предельных переходов от фильтров Золотарёва-Кауэра к фильтрам Чебышева (при $a_{0min}=35$ дБ) и фильтрам Чебышева и Баттерворта (при $a_{0min}=25$ дБ). Отметим, что при жестких требованиях к параметрам АЧХ зоны предельных переходов образуются при значениях N много больших, чем минимальный порядок фильтра Золотарёва-Кауэра.

Заключение. Представленные впервые реальные конфигурации трехмерной области ДИП цифровых БИХ-фильтров нижних частот Золотарёва-Кауэра могут существенно отличаться от их качественных изображений, опубликованных ранее, а именно протяженными и сильно уплощенными участками. Приведенные конфигурации области ДИП, построенные для конкретных требований к АЧХ, являются типичными, поскольку при других требованиях изменяются лишь их пропорции. Кроме того, при замене граничных частот f_1 на $0,5-f_1$ и f_2 на $0,5-f_2$ и смене направлений осей частот на графиках эти конфигурации становятся типичными и для фильтров верхних частот. Тем не менее, представляется, что построение реальных конфигураций области ДИП для тех или иных требований к АЧХ поможет разработчикам глубже осознать и удачно решить проблему выбора исходных параметров при проектировании БИХ-фильтров с теми или иными свойствами.

Литература

1. Мингазин А.Т. Начальные приближения для синтеза цифровых фильтров с минимальной длиной слова коэффициентов. // Электронная техника. 1983. Сер.10. № 6. Р. 3-8.
2. Савченко С.М., Смирнов Э.Е. Улучшение частотных характеристик эллиптических фильтров. Изв. вузов СССР. Сер. Радиоэлектроника.1976.Т. XIX. № 6. С. 113-116.
3. Мингазин А.Т. Способ улучшения характеристик затухания фильтров. Радиотехника. 1985. № 9. С. 89-91.
4. Vlcek M., Unbehauen R. Degree, ripple and transition width of elliptic filters. IEEE Trans. 1989. CAS-36. No. 3. P. 469-472.
5. Мингазин А.Т. Экстремальные параметры аналоговых и цифровых фильтров. Электро-связь. 1999. № 1. С. 22-23.
6. Totic D.V., Lutovac M. D., Evans B.L. Advanced digital IIR filter design. ECCTD. 1999. P.1323-1326.

7. Corral C.A., Lindquist C.S. Design for optimum classical filters. Proc. IEE Circuit Devices Syst. 2002. Vol. 149. No. 5/6. P.291-301.
8. Алёшин Д.В., Мингазин А.Т. Программа для расчета экстремальных параметров цифровых и аналоговых фильтров и ее применение. Цифровая обработка сигналов. 2006. № 1. P.45-49.
9. Dimopoulos H.G. Optimal use of some classical approximations in filter design. IEEE Trans. 2007. CAS-II. Vol. 54. No. 9. P.780-784.
10. Мингазин А. Резервы классических аппроксимаций цифровых БИХ-фильтров. Современная электроника. 2012. №9. С.62-71. (Статью с исправленными опечатками см. на сайте [www. radis.ru](http://www.radis.ru)).
11. Holt A.G.J., Gray J.P., Fidler J.K. Transient response of elliptic function filters. IEEE Trans. 1968. CT-15. March. P. 71-73.
12. Antoniou A., Charalambous C., Motamedi Z. Two methods for the reduction of quantization effects in recursive digital filters. IEEE Trans. 1983. CAS-30. No.3. P. 160-166.
13. Мингазин А.Т. Область допустимых исходных параметров цифровых фильтров Золотарева-Кауэра//15-я Международная конференция 'Цифровая обработка сигналов и ее применение'. (DSPA). 2013. Т.1. С.125-128.