Минимально-фазовые БИХ-фильтры с минимальной неравномерностью ХГВЗ

В статье представлены два подхода к синтезу минимально-фазовых цифровых БИХ-фильтров с минимальной неравномерностью ХГВЗ в полосе пропускания и требуемой АЧХ. В первом из них оптимизируются исходные параметры АЧХ классических фильтров Золотарева — Кауэра, Чебышева и Баттерворта, а во втором — коэффициенты каскадной передаточной функции фильтра с нулями передачи на единичной окружности. Численные результаты показывают, что первый подход приводит к хорошим результатам, но неклассические минимально-фазовые БИХ-фильтры, полученные с помощью второго подхода, могут иметь значительно меньшие неравномерности ХГВЗ. Степень уменьшения зависит от требований к АЧХ.

Александр МИНГАЗИН
alexmin@radis.ru

Введение

Известно, что нули передаточной функции минимально-фазовых цифровых БИХ-фильтров находятся внутри единичной окружности комплексной *z*-плоскости. Классические БИХ-фильтры, полученные на основе билинейного преобразования аналоговых фильтров-прототипов Золотарева — Кауэра, Чебышева, Баттерворта и других, имеют нули на единичной окружности и согласно [1] не являются строго минимально-фазовыми, но обладают рядом их свойств. Поэтому далее будем называть эти фильтры, как и в некоторых публикациях, минимально-фазовыми.

Известно также, что БИХ-фильтры часто оказываются непригодными из-за свойственной им большой неравномерности ХГВЗ в полосе пропускания. Из ряда существующих методов уменьшения этой неравномерности выделим следующие:

- Коррекция неравномерности ХГВЗ фильтра с приемлемой АЧХ оптимизированной фазовой (всепропускающей) цепью.
- Минимизация неравномерности ХГВЗ полюсного БИХ-фильтра с последующей коррекцией его АЧХ оптимизированным КИХ-фильтром с линейной ФЧХ.
- Минимизация неравномерности ХГВЗ БИХ-фильтра при заданных допусках на отклонение АЧХ без ограничения на расположение нулей передачи.
- Минимизация неравномерности ХГВЗ классических БИХ-фильтров путем оптимального выбора исходных параметров АЧХ.
- Минимизация неравномерности ХГВЗ БИХ-фильтра с нулями передачи на единичной окружности при заданных допусках на отклонение АЧХ.

Широко распространенный первый метод может приводить к завышенному результирующему порядку фильтра. Второй [2] — позволяет получить экстремально малые неравномерности ХГВЗ в сравнении с первым методом (особенно для узкополосных фильтров). Третий [3] дает экстремально малые неравномерности ХГВЗ в сравнении с первым и некоторыми другими конкурирующими методами. Четвертый [4] не всегда приводит к желаемым результатам. Пятый [5] позволяет улучшить решения, получаемые четвертым методом.

Все эти методы минимизации неравномерности ХГВЗ отличаются степенью сложности и за исключением четвертого и пятого метода приводят к неминимально-фазовым БИХ-фильтрам, которым в отличие от минимально-фазовых БИХ-фильтров свойственна переходная характеристика с длительным временем нарастания, что нежелательно в ряде приложений, например в измерительной технике и некоторых системах телекоммуникации и связи [6].

В данной статье внимание сосредоточим на проблемах минимизации неравномерности ХГВЗ в полосе пропускания минимально-фазовых БИХ-фильтров нижних частот. Рассмотрим оба вышеупомянутых метода, вначале — основанный на оптимальном выборе исходных параметров АЧХ четырех классических БИХ-фильтров (Баттерворта, Чебышева I, II и Золотарева — Кауэра), а затем метод, основанный на оптимизации коэффициентов каскадных БИХ-фильтров с нулями передачи на единичной окружности. Минимально-фазовые БИХ-фильтры, полученные вторым методом, будем называть здесь неклассическими.

Классические БИХ-фильтры с минимальной неравномерностью ХГВЗ

Вначале определим области допустимых исходных параметров четырех классических БИХ-фильтров Баттерворта, Чебышева I, II и Золотарева — Кауэра. Затем рассмотрим решение задачи поиска в каждой из областей оптимальной точки, соответствующей фильтру с минимальной неравномерностью ХГВЗ в полосе пропускания, и представим численные результаты.

Области допустимых исходных параметров

Области допустимых исходных параметров $S(\mathbf{p})$ для обсуждаемых БИХ-фильтров нижних частот показаны на рис. 1. Это лишь качественные фигуры, хотя по конкретным требованиям к АЧХ можно построить точные конфигурации областей. Компонентами вектора $\mathbf{p}$, размерность которого не превышает трех, могут быть следующие исходные параметры: Δa — неравномерность АЧХ в полосе пропускания, a_0 — минимальное ослабление в полосе задерживания, а также f_1, f_2 — граничные частоты полосы пропускания и задерживания. Расчет фильтра для любой точки той или иной области приво-

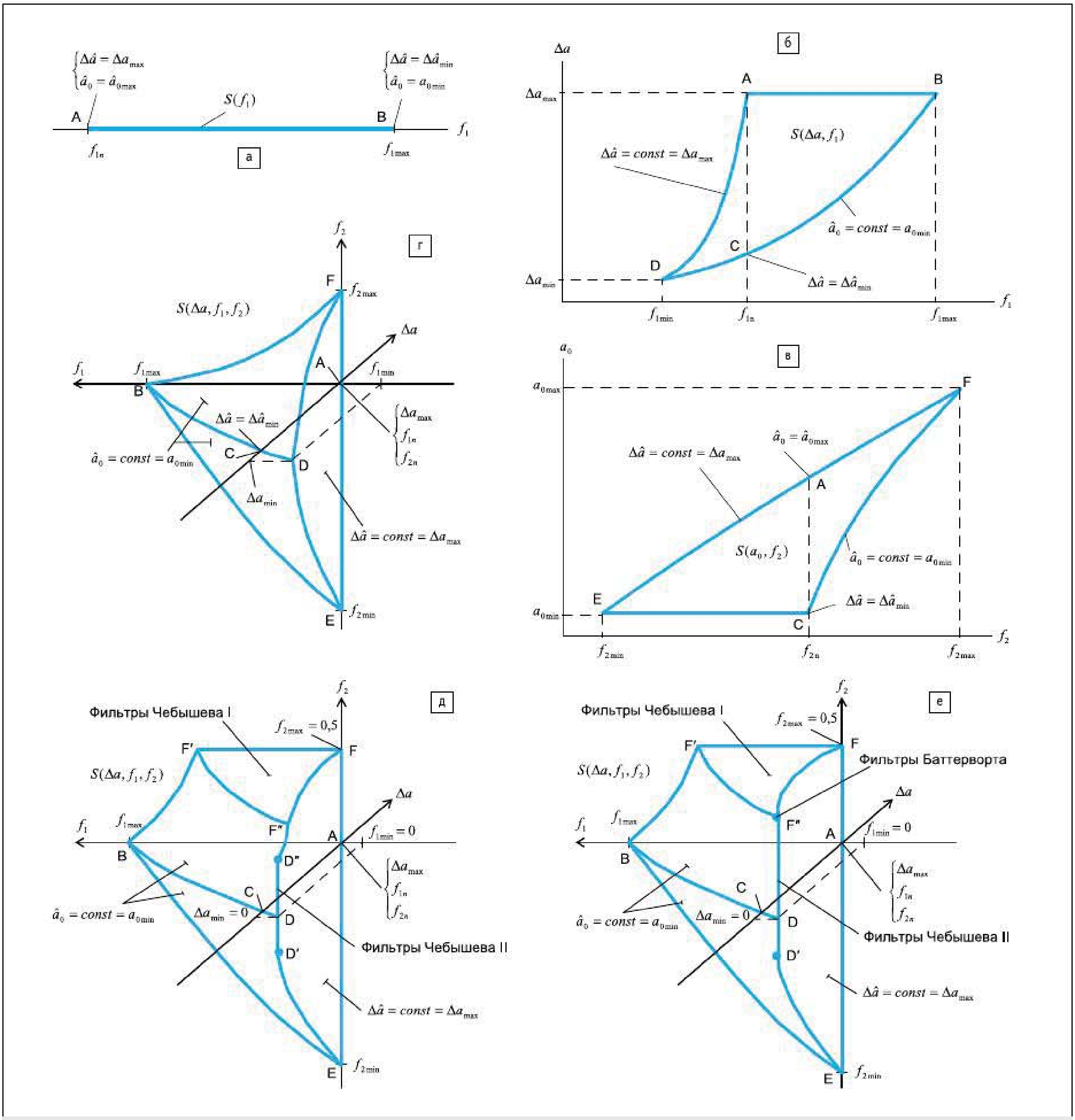

Рис. 1. Области допустимых исходных параметров фильтров: а) Баттерворта; б) Чебышева I; в) Чебышева II; г–е) Золотарева — Кауэра

дит к допустимой АЧХ, параметры которой удовлетворяют следующим условиям:

$$\Delta\hat{a} \le \Delta a_{\max},\ \hat{a}_0 \ge a_{0\,\min}, \qquad (1)$$

где $\Delta\hat{a}$ — неравномерность АЧХ в номинальной полосе пропускания ($0 \le f \le f_{1n}$), $\hat{a}_0$ — минимальное ослабление АЧХ в номинальной полосе задерживания ($f_{2n} \le f \le 0{,}5$), а $\Delta a_{\max}$ и $a_{0\,\min}$ — заданные допуски по неравномерности и ослаблению, частоты f_{1n}, f_{2n} и f нормированы относительно частоты дискретизации.

В обозначениях задаваемых допусков в (1) знак соответствия номинальной полосе не используется, поскольку всегда:

$$\Delta\hat{a}_{\max} = \Delta a_{\max} \text{ и } \hat{a}_{0\,\min} = a_{0\,\min}.$$

Предполагается, что параметры в (1) выражены в децибелах и максимум АЧХ в полосе пропускания нормирован к 0 дБ. По значениям f_{1n}, f_{2n}, $\Delta a_{\max}$ и $a_{0\,\min}$ оценивается порядок фильтра N. Строгим равенствам в (1) соответствует целое N, точечная область $S(\mathbf{p})$ и лишь один вариант расчета фильтра.

На рис. 1 наряду с допусками $\Delta a_{\max}$, $a_{0\,\min}$ и номинальными частотами f_{1n} и f_{2n} фигурируют экстремальные значения $\Delta\hat{a}_{\min}$, $\hat{a}_{0\,\max}$, $\Delta a_{\min}$, $a_{0\,\max}$ и $f_{i\,\min}$, $f_{i\,\max}$, $i = 1,2$. Характерные точки на рис. 1 помечены буквами A, B, C, … На рис. 1б,в отмечены также кривые, а на рис. 1г–е — поверхности постоянства $\Delta\hat{a}$ и $\hat{a}_0$.

Неявные выражения для описания областей $S(\mathbf{p})$ даны в таблице 1. Здесь $a(\cdot)$ — характеристики ослабления, а $\Phi(\cdot)$ — функции для определения порядков обсуждаемых фильтров. Для упрощения записи зависимость неявных функций $a(\cdot)$ и $\Phi(\cdot)$ от N опущена.

Для фильтров Баттерворта область $S(\mathbf{p}) = S(\mathbf{p}_1) = S(f_1)$ или $S(\mathbf{p}_1) = S(\Delta a)$ полностью определяется диапазоном изменения параметра f_1 или Δa. На рис. 1а показана область $S(f_1)$ в виде отрезка прямой AB. Для фильтров Чебышева I двумерная область $S(\Delta a, f_1)$ с характерными точками A, B, C, D представлена на рис. 1б, а для фильтров Чебышева II двумерная область $S(a_0, f_2)$ с характерными точками A, C, E, F — на рис. 1в.

Для фильтров Золотарева — Кауэра трехмерная область $S(\Delta a, f_1, f_2)$ может иметь три вида конфигураций, показанных на рис. 1г–е. Область на рис. 1г образована пересечениями плоскости $\Delta a = \Delta a_{\max}$ и трех поверхностей с характерными точками B, D, E для первой, D, E, F для второй и B, D, F для третьей поверхности. Начало координат соответствует точке A. Точки A, B, C, D лежат в плоскости $f_2 = f_{2n}$.

Области на рис. 1д,е обусловлены предельными переходами согласно схеме на рис. 2. Так, от фильтров Золотарева — Кауэра возможен переход к фильтрам Чебышева на рис. 1д и к фильтрам Чебышева и Баттерворта на рис. 1е. Образовавшиеся фигуры с характерными точками F, F′, F″ располагаются в плоскости $f_2 = 0{,}5$, а появившиеся отрезки прямых D′D″ на рис. 1д и D′F″ на рис. 1е соответствуют $\Delta a = 0$ и $f_1 = 0$.

Если вернуться к областям фильтров Чебышева I и II на рис. 1б,в, то здесь, пользуясь схемой на рис. 2, можно указать точки предельного перехода к фильтрам Баттерворта. На рис. 1б это точка D с координатами $\Delta a = \Delta a_{\min} = 0$ и $f_1 = f_{1\min} = 0$, а на рис. 1в — точка F с координатами $a_0 = a_{0\max} = \infty$ и $f_2 = f_{2\max} = 0{,}5$ (в [4] вместо точки F ошибочно говорится об отрезке прямой).

Заметим, что предельный переход от одного фильтра к другому имеет место, если для каждого из этих фильтров одинакового порядка выполняются условия (1).

Области $S(\mathbf{p})$ на рис. 1а–г были ранее представлены в [7], на рис. 1а–г,е — в [4] и на рис. 1г–е — в [8]. В работах [7, 8] даны математические описания областей в явной и неявной форме. Более детальное пояснение предельных переходов дано в [4, 8].

Таблица 1. Описание областей допустимых исходных параметров

Области S(p) фильтров нижних частот			
Баттерворта	Чебышева I	Чебышева II	Золотарева — Кауэра
$S(f_1)$	$S(\Delta a, f_1)$	$S(a_0, f_2)$	$S(\Delta a, f_1, f_2)$
$f_1 \geq f_{1n}$, $N \geq \Phi(\Delta a_{\max}, a_{0\max}, f_1, f_{2n})$	$\Delta a \leq \Delta a_{\max}$, $N \geq \Phi(\Delta a, a_{0\min}, f_1, f_{2n})$, $a(f = f_{1n}, \Delta a, f_1) \leq \Delta a_{\max}$	$a_0 \geq a_{0\min}$, $N \geq \Phi(\Delta a_{\max}, a_0, f_{1n}, f_2)$, $a(f = f_{2n}, a_0, f_2) \geq a_{0\min}$	$\Delta a \leq \Delta a_{\max}$, $N \geq \Phi(\Delta a, a_{0\min}, f_1, f_2)$, $a(f = f_{1n}, \Delta a, f_1, f_2) \leq \Delta a_{\max}$, $a(f = f_{2n}, \Delta a, f_1, f_2) \geq a_{0\min}$, $f_2 < 0{,}5$

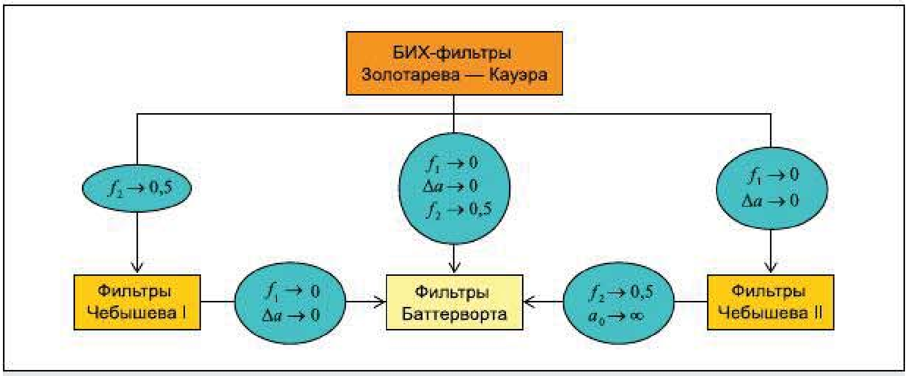

Рис. 2. Схема предельных переходов

Оптимальные точки областей

Допустим, область $S(\mathbf{p})$ фильтра Золотарева — Кауэра представляет собой точку, что соответствует строгим равенствам в (1). В этой ситуации фильтры Золотарева — Кауэра обладают не только глобально оптимальной АЧХ, что им свойственно независимо от размера $S(\mathbf{p})$, но и глобально оптимальной ХГВЗ, которая в конкретных случаях может оказаться совершенно неприемлемой. Подобные рассуждения можно отнести и к трем другим обсуждаемым здесь классическим фильтрам, АЧХ которых являются в определенном смысле глобально оптимальными. Получить лучшее соотношение между параметрами АЧХ и ХГВЗ можно лишь в случае неточечной области $S(\mathbf{p})$, подобрав вектор исходных параметров $\mathbf{p}$ или рассчитав минимально-фазовый БИХ-фильтр другими методами.

Задачу синтеза классических БИХ-фильтров с минимальной неравномерностью ХГВЗ можно сформулировать как:

$$\begin{gathered}\Delta\tau(\mathbf{p}) = \tau_{\max}(\mathbf{p}) - \tau_{\min}(\mathbf{p}) \to \min,\\ \Delta\hat{a}(\mathbf{p}) \leq \Delta a_{\max},\ \hat{a}_0(\mathbf{p}) \geq a_{0\min},\\ \mathbf{p} \in S(\mathbf{p}),\end{gathered} \tag{2}$$

где $\Delta\tau$ — неравномерность ХГВЗ в номинальной полосе пропускания, а $\tau_{\max}$ и $\tau_{\min}$ — максимальное и минимальное значения ХГВЗ в этой полосе. Положим для дальнейшего, что эти параметры ХГВЗ выражены в отсчетах частоты дискретизации.

Решить поставленную задачу аналитически затруднительно из-за сложности функций, входящих в (2). Решения были получены косвенным путем в [4]. На основе результатов прямого исследования областей $S(\mathbf{p})$ на рис. 1 и известных фактов о взаимосвязи параметров АЧХ и о влиянии их на неравномерность ХГВЗ сделаны следующие выводы.

Для фильтров Баттерворта минимуму $\Delta\tau$ соответствует точка B в $S(f_1)$ на рис. 1а, а для фильтров Чебышева II — точка C в $S(a_0, f_2)$ на рис. 1в. Для фильтров Чебышева I и Золотарева — Кауэра минимум $\Delta\tau$ расположен в некоторой точке на кривой BD, соответственно в областях $S(\Delta a, f_1)$ на рис. 1б и $S(\Delta a, f_1, f_2)$ на рис. 1 г–е. Процедура нахождения такой оптимальной точки сводится к поиску минимума функции одной переменной, что легко выполнить на дискретном наборе частот f_1. Фильтры Золотарева — Кауэра имеют наименьшую неравномерность $\Delta\tau$, фильтры Баттерворта — наибольшую. Фильтры Чебышева занимают промежуточное положение, причем предпочтительнее фильтры Чебышева II, но при очень широкой полосе пропускания, мало востребованной на практике, фильтры Чебышева I могут иметь несколько меньшие $\Delta\tau$, чем фильтры Чебышева II.

Численные результаты

Проиллюстрируем описанные способы выбора оптимальных точек в областях $S(\mathbf{p})$ на рис. 1 для следующих требований к АЧХ:

$$\begin{gathered}\Delta a_{\max} = 3\ \text{дБ},\ a_{0\min} = 45\ \text{дБ},\\ f_{1n} = 0{,}1,\ f_{2n} = 0{,}2.\end{gathered} \tag{3}$$

На рис. 3 для обсуждаемых фильтров представлены семейства зависимостей неравномерности ХГВЗ $\Delta\tau$ от исходных параметров областей $S(\mathbf{p})$. Точки A, B, C, … на рис. 3б–г соответствуют аналогичным точкам в областях $S(\mathbf{p})$ на рис. 1б–г.

Для фильтров Баттерворта семейство зависимостей $\Delta\tau$ от исходной частоты f_1 показано на рис. 3а. Семейство построено для частот f_1 области $S(f_1)$ на рис. 1а при трех значениях N, включая минимальное $N = 7$. Как видим, минимум $\Delta\tau$ для каждого N соответствует максимальной частоте f_1 или точке B в области $S(f_1)$ на рис. 1а. При $N = 7$ минимум $\Delta\tau = 6$.

Для фильтров Чебышева I семейство зависимостей $\Delta\tau$ от f_1 на рис. 3б построено для ряда кривых $\hat{a}_0 = \text{const}$ в области $S(\Delta a, f_1)$ на рис. 1б при минимальном $N = 5$. Минимум $\Delta\tau = 3{,}9$ находится на кривой BD.

Для фильтров Чебышева II семейство зависимостей $\Delta\tau$ от f_2 на рис. 3в построено для

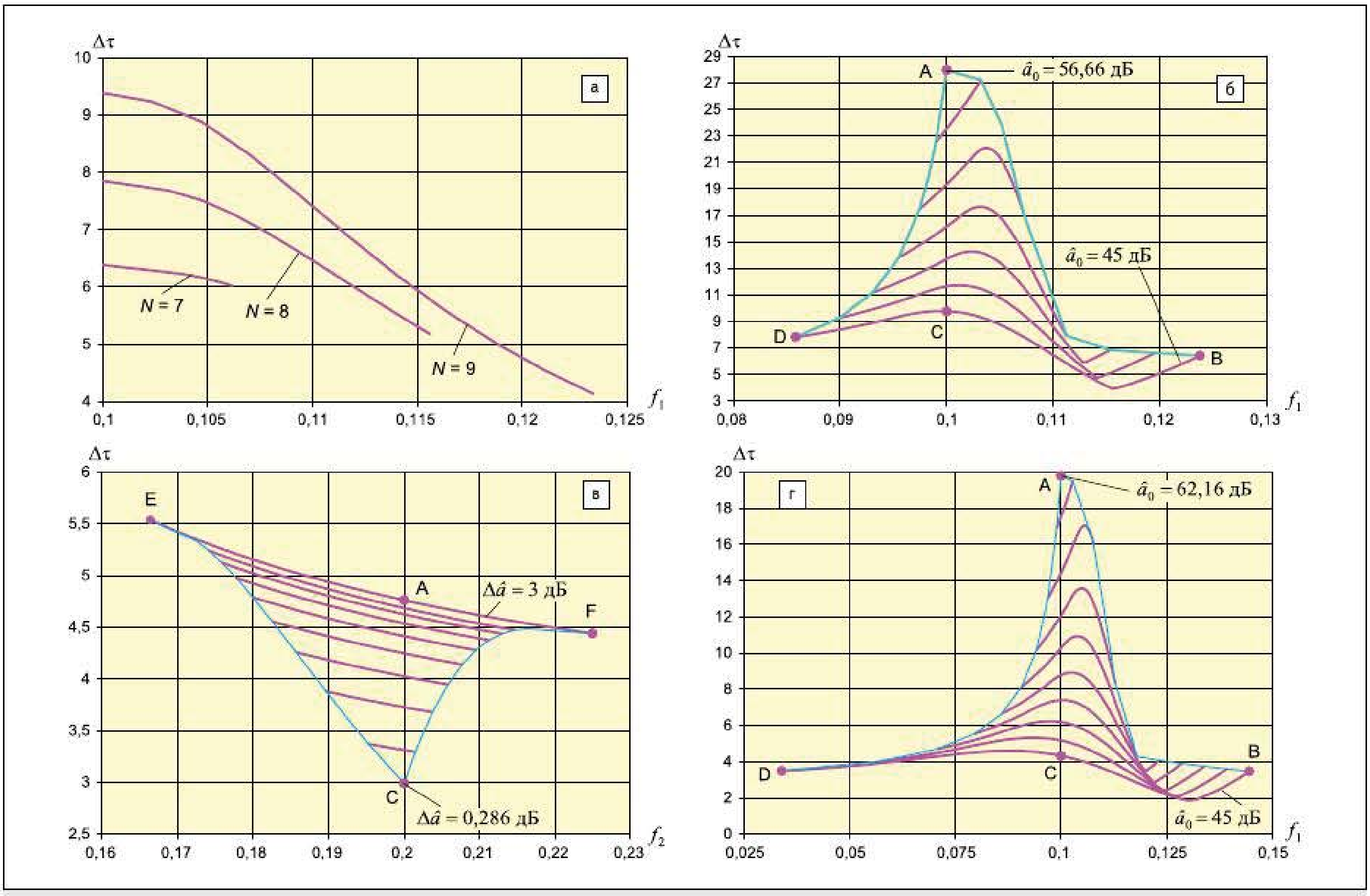

Рис. 3. Зависимости неравномерности ХГВЗ от исходной граничной частоты f_1 или f_2 для фильтров:
а) Баттерворта при N = 7, 8 и 9; б) Чебышева I при N = 5, $\hat{a}_0$ = 45; 47; ...; 55 и 56, 66 дБ;
в) Чебышева II при N = 5, $\Delta\hat{a}$ = 0,286; 0,4; 0,6; ...; 1,8 и 3 дБ; г) Золотарева — Кауэра при N = 4, f_2 = 0,2, $\hat{a}_0$ = 45; 47; ...; 61 и 62,16 дБ

Таблица 2. Минимальные значения Δτ для классических фильтров и соответствующие исходные параметры

Фильтр	N	Δτ	Исходные параметры	
			Δa, дБ	f_1
Баттерворта	7	6		0,10617
	8	5,2		0,11562
	9	4,1		0,12343
Чебышева I	5	3,9	1,492	0,11565
	6	3,6	0,249	0,1201
	7	2,3	0,842	0,1448
	8	2,5	0,12	0,144
	9	2,5	0,039	0,148
Золотарева — Кауэра ($f_2 = f_{2н} = 0,2$)	4	1,8	1,147	0,13075
	5	1,5	2,384	0,17025
	6	1,2	0,243	0,1712
	7	0,9	1,72	0,1918
	8	1,1	0,077	0,188
	9	0,8	1,596	0,19793
Фильтр	**N**	**Δτ**	**Исходные параметры**	
			a_0, дБ	f_2
Чебышева II	5	3	45	0,2
	6	1,9		
	7	1,5		
	8	1,3		
	9	1,3		

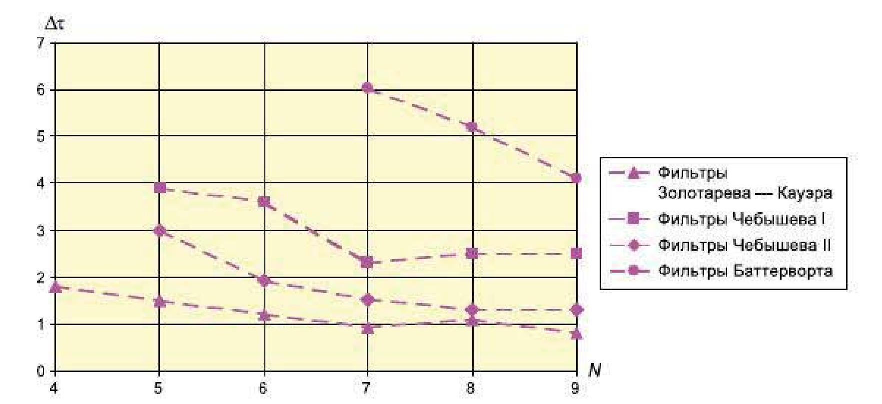

Рис. 4. Зависимости минимальной неравномерности ХГВЗ классических фильтров от порядка N

ряда кривых $\Delta\hat{a}$ = const в области $S(a_0, f_2)$ на рис. 1в при $N = 5$. Минимум $\Delta\tau = 3$ находится в точке C.

Для фильтров Золотарева — Кауэра семейство зависимостей Δτ от f_1 на рис. 3г построено для ряда кривых $\hat{a}_0$ = const в области $S(\Delta a, f_1, f_2)$ на рис. 1г при $f_2 = f_{2н}$ и минимальном $N = 4$. Минимум $\Delta\tau = 1,8$ находится на кривой BD.

Согласно рис. 3 разброс по Δτ для фильтров Золотарева — Кауэра и Чебышева I достигает примерно 10 раз, для фильтров Чебышева II — примерно двух раз, а для фильтров Баттерворта при $N = 7$ он очень мал. На самом деле для фильтров Золотарева — Кауэра разброс (но лишь в сторону увеличения Δτ) больше указанного, поскольку семейство кривых на рис. 3г, построенное при $f_2 = f_{2н}$, не охватывает всю область $S(\Delta a, f_1, f_2)$ на рис. 1г.

Для всех фильтров в таблице 2 приведены минимальные значения Δτ, найденные при разных N. Кроме того, здесь даны исходные параметры, по которым получены эти результаты. На рис. 4 показаны зависимости

$\Delta\tau$ от N, построенные по данным таблицы 2. Как видим, дополнительное уменьшение $\Delta\tau$ (более чем в 2 раза) может быть получено для фильтров большего порядка. Однако увеличение N более чем в 2 раза малоэффективно. Фильтры Золотарева — Кауэра имеют наименьшие, а фильтры Баттерворта — наибольшие значения $\Delta\tau$. Фильтры Чебышева занимают промежуточные положения.

Неклассические минимально-фазовые БИХ-фильтры с минимальной неравномерностью ХГВЗ

Надлежащий выбор исходных параметров АЧХ и порядка позволяет получить классические фильтры с минимальной неравномерностью ХГВЗ в номинальной полосе пропускания. Однако такой подход может не дать ожидаемых результатов, поскольку обсуждаемые фильтры, когда-то предложенные для получения желаемых АЧХ, не обязательно обладают наименьшей неравномерностью ХГВЗ. Поэтому можно попытаться улучшить классические решения, сохраняя свойство минимальной фазы. Далее сформулируем задачу синтеза неклассических минимально-фазовых каскадных БИХ-фильтров с минимальной неравномерностью ХГВЗ, определим начальные приближения, представим возможные методы условной и безусловной оптимизации для решения этой задачи, приведем примеры синтеза фильтров и покажем, что результаты, полученные для классических БИХ-фильтров, могут быть значительно улучшены.

Постановка задачи синтеза фильтров

Передаточную функцию каскадного БИХ-фильтра нижних частот N-го порядка запишем в виде:

$$H(z)=\prod_{i=1}^{K}\frac{1+B_{1i}z^{-1}+B_{2i}z^{-2}}{1+A_{1i}z^{-1}+A_{2i}z^{-2}},\qquad(4)$$

где $K = N/2$ и $K = (N+1)/2$ соответственно для четных и нечетных N, коэффициенты $A_{2m} = B_{2im} = 0$ для некоторого $m \leq K$ и нечетного N.

Задачу минимизации неравномерности ХГВЗ в номинальной полосе пропускания для БИХ-фильтров с передаточной функцией (4) сформулируем как:

$$\begin{aligned}&\Delta\tau(\mathbf{A}) = \tau_{\max}(\mathbf{A})-\tau_{\min}(\mathbf{A}) \to \min,\\ &\Delta\hat{a}(\mathbf{C}) \leq \Delta a_{\max},\ \hat{a}_0(\mathbf{C}) \geq a_{0\,\min},\\ &a_t(\mathbf{C}) \geq a_{t\,\min},\\ &\mathbf{A} \in U, \mathbf{B} \in R,\end{aligned}\qquad(5)$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — векторы искомых коэффициентов знаменателей и числителей в (4), вектор $\mathbf{C}$ включает $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, a_t — минимальное ослабление АЧХ в переходной полосе и его допустимое значение $a_{t\,\min}$, выраженные в децибелах, U — область устойчивости, R — область, соответствующая единичной окружности.

В отличие от (2) $\Delta\tau$, $\tau_{\max}$, $\tau_{\min}$, $\Delta\hat{a}$ и $\hat{a}_0$ в (5) представлены как функции вектора $\mathbf{A}$ или $\mathbf{C}$. Требование к вектору $\mathbf{B}$ обеспечивает расположение нулей $H(z)$ на единичной окружности и постоянство ХГВЗ (линейность ФЧХ) для фильтра с передаточной функцией в виде числителя (4).

Обычно при синтезе частотных фильтров к АЧХ в переходной полосе не предъявляется никаких требований. Это относится и к рассмотренным выше классическим фильтрам, для которых всплеск АЧХ в переходной полосе не превышает 0 дБ, или иначе ослабление АЧХ $a_t \geq 0$ дБ. Однако при минимизации неравномерности ХГВЗ или нелинейности ФЧХ всплеск АЧХ в переходной полосе может оказаться неприемлемым, и поэтому его желательно ограничить [3,9], что и сделано в (5). Возможно еще более жесткое условие, а именно АЧХ в переходной полосе с увеличением частоты монотонно убывает. Это условие приводит к некоторому ухудшению результатов в сравнении с простым ограничением всплеска [9].

Формулировка задачи синтеза (5) с функциями ограничения, выраженными в децибелах, обусловлена удобством изложения данной статьи. На практике целесообразно представить эти функции в относительных единицах.

Начальные приближения

При решении поставленной задачи в качестве начального приближения удобно взять тот или иной классический БИХ-фильтр, поскольку все ограничения в (5) для такого исходного фильтра оказываются выполненными.

В общем случае требование в (5) к вектору $\mathbf{B}$ означает, что коэффициенты числителей $H(z)$ в (4) для фильтров нижних частот должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{gathered}|\mathbf{B}_{1i}| \leq 2,\ \mathbf{B}_{2i} = 1,\ \forall i = 1\ldots K\\ \text{и четного } N \text{ и } \forall i \neq m \text{ и нечетного } N;\\ \mathbf{B}_{1m} = 1,\ \mathbf{B}_{2m} = 0 \text{ для нечетного } N.\end{gathered}\qquad(6)$$

В частном случае имеет место строгое равенство в (6), и тогда в (5) неизвестен только вектор $\mathbf{A}$, поскольку вектор $\mathbf{B}$ будет содержать лишь известные целочисленные компоненты. Общему случаю отвечают фильтры Чебышева II и Золотарева — Кауэра, а частному — фильтры Баттерворта и Чебышева I.

При решении задачи (5) целесообразно в качестве исходного выбрать фильтр Золотарева — Кауэра или Чебышева I. Далее используем целый ряд исходных фильтров Золотарева — Кауэра, рассчитанных для точек области $S(\Delta a, f_1, f_2)$ (на рис. 1г,д или 1е), располагающихся на кривых $\hat{a}_0 = \text{const}$ в некоторой Δ-окрестности кривой BD при $a_{0\,\min} \leq \hat{a}_0 \leq a_{0\,\min}+\Delta$ и $f_2 = f_{2n}$ [5]. Точку на той или иной кривой $\hat{a}_0 = \text{const}$ будем характеризовать параметрами f_1, $\hat{a}_0$. Напомним, что на кривой BD, для которой $\hat{a}_0 = a_{0\,\min}$, находится оптимальная точка, соответствующая минимуму $\Delta\tau$ для фильтров Золотарева — Кауэра.

Методы решения задачи

Задачу (5) можно решить теми или иными методами нелинейного программирования. Применим для сравнения два известных метода безусловной и условной оптимизации (см., например, [10, 11] и ссылки в этих работах), а именно метод градиента (МГ) и метод градиента с возвратом (МГВ).

В МГВ, как и в МГ, поиск в области допуска ведется в направлении -grad$\Delta\tau$ с постоянным шагом [10]. Для задачи (5) с тремя ограничениями на параметры АЧХ возможны семь ситуаций, когда в методе МГВ требуется возврат в область допуска. Эти три ограничения можно привести к виду $g_i \leq 0$, t = 1, 2, 3, а возникающие ситуации описать функциями G_m, $m = 1, 2, \ldots, 7$. Так, $G_m = g_m$, $m = 1, 2$ или 3 при нарушении одного из трех ограничений, $G_4 = g_1+g_2$, $G_5 = g_1+g_3$ или $G_6 = g_2+g_3$ — при нарушении двух из трех ограничений и $G_7 = g_1+g_2+g_3$ при нарушении всех трех ограничений. После возникновения m-й ситуации производится пошаговое перемещение в направлении -grad G_m для возврата в зону допуска.

Результаты решения задачи (5) с помощью обсуждаемых методов оптимизации можно улучшить благодаря следующим приемам:

- поиск на большем числе наборов параметров f_1, $\hat{a}_0$;
- подбор начального шага поиска;
- поиск на большем числе наборов параметров f_1, $\hat{a}_0$ в окрестности найденного оптимума;
- неоднократный повтор поиска с уменьшенным шагом в окрестности найденного оптимума.

Для оценки необходимых градиентов используем аналитические выражения. Текущие оценки параметров АЧХ и ХГВЗ выполним по 100 частотным точкам в каждой из полос, а окончательные оценки для найденного решения уточним по 500 точкам.

Численные результаты

Представим два примера решения задачи (5), рассмотренные в [5]. Первый пример с требованиями к АЧХ (3), а второй — с требованиями к АЧХ из [12], которые использовались многими авторами. Первый пример проиллюстрируем и обсудим более подробно, что позволит понять детали, связанные с решением задачи (5) методами условной и безусловной оптимизации.

Пример 1. Как было отмечено выше, требованиям (3) удовлетворяет фильтр Золотарева — Кауэра с $N \geq 4$. Вначале уделим внимание безусловной оптимизации на основе МГ, а затем условной — на основе МГВ. В обоих случаях ограничимся исходными фильтрами Золотарева — Кауэра, рассчитанными для $N = 5$, $f_1 = 0{,}08$, 0,1, 0,12, $\hat{a}_0 = 45$, 50, 55 дБ и $f_2 = f_{2n} = 0{,}2$. Таким образом, количество исходных точек f_1, $\hat{a}_0$ равно девяти.

Интересно посмотреть на процессы изменения параметров $\Delta\tau$, $\Delta\hat{a}$, $\hat{a}_0$ и a_t синтезируемого фильтра от числа итераций в каждом из методов. Для уменьшения числа графиков вместо контролируемых параметров $\Delta\hat{a}$ и $\hat{a}_0$ используем максимальную взвешенную ошибку АЧХ, связанную с этими параметрами как:

$$\mathbf{e} = \max[(1-10^{-0{,}05\Delta\hat{a}})/(1-10^{-0{,}05\Delta a_{\max}}),\ 10^{-0{,}05(\hat{a}_0-a_{0\,\min})}].$$

В этом случае двум ограничениям на $\Delta\hat{a}$ и $\hat{a}_0$ в (5) соответствует одно условие $\mathbf{e} \leq 1$.

Безусловная оптимизация

На рис. 5 представлены зависимости параметров $\Delta\tau$, $\mathbf{e}$ и a_t синтезируемого фильтра от числа итераций в МГ для трех из девяти заданных исходных точек с $f_1 = 0{,}12$, $\hat{a}_0 = 45, 50, 55$ дБ. Согласно рис. 5а с увеличением числа итераций значение $\Delta\tau$ существенно уменьшается. Характер трех кривых зависит от значения $\hat{a}_0$. Замечено, что все три процесса минимизации $\Delta\tau$ прерываются нарушением условий устойчивости, не доходя до 3×10^4 итераций, причем это обусловлено перемещением доминирующей (ближайшей к единичной окружности) пары комплексно-сопряженных полюсов фильтра за пределы единичной окружности.

Для каждого $\hat{a}_0$ примерно одно и то же устойчивое решение с очень малым значением $\Delta\tau \approx 0{,}003$ можно получить при числе итераций более 10^4. Однако это решение становится бесполезным, если обратиться к зависимостям на рис. 5б. Еще до 10^4 итераций значение ошибки $\mathbf{e}$ начинает возрастать и становится больше единицы, что по условию решаемой задачи неприемлемо. Тем не менее на рис. 5б можно выделить интервалы, в которых $\mathbf{e} \leq 1$. Один находится в ближней зоне (до 100 итераций) для всех трех кривых, а другой — в дальней зоне (от 10^3 до 10^4 итераций) и лишь для двух кривых.

На рис. 5в показаны зависимости ослабления в переходной полосе a_t от числа итераций. Выбор решения с $\mathbf{e} \leq 1$ на рис. 5б из ближней или дальней зоны зависит от значения $a_{t\,\min}$ в (5), которое до сих пор не было задано. Если $a_t \geq a_{t\,\min} = 0$ дБ, то решение с $\mathbf{e} \leq 1$ и минимальной $\Delta\tau$ можно найти лишь в ближней зоне.

Результаты безусловной оптимизации для всех девяти исходных точек f_1, $\hat{a}_0$ представлены в табл. 3, где также указано число потребовавшихся итераций. Для некоторых значений $\hat{a}_0$ даны два решения — в ближней и дальней зоне (вторая строка цифр). Решение в дальней зоне определяется исходя из того, чтобы получить как можно большее значение a_t. Поэтому процесс оптимизации должен быть прерван при появлении первого допустимого решения с $\mathbf{e} \leq 1$, что обусловлено поведением кривых на рис. 5в.

Данные таблицы 3 дают представление о влиянии выбора исходных параметров на результаты оптимизации. Как видим, для лучших решений в ближней и дальней зоне $\Delta\tau = 0{,}485$ и $\Delta\tau = 0{,}036$ соответственно. Благодаря приемам, описанным выше, эти значения были дополнительно уменьшены до $\Delta\tau = 0{,}212$ дБ и $\Delta\tau = 0{,}009$. Для сравнения, в [5] в ближней зоне получено $\Delta\tau = 0{,}315$.

Таблица 3. Результаты безусловной оптимизации

Исходные параметры		Параметры синтезированных фильтров			Итерации
f_1	$\hat{a}_0$, дБ	$\Delta\tau$	e	a_t, дБ	
0,08	45	0,598	0,969	2,86	28
	50	1,09	0,982	2,94	23
	55	2,23 0,049	0,970 1	2,89 −1,05	18 1005
0,1	45	0,529	0,960	2,86	26
	50	0,848 0,037	0,986 1	2,95 −0,695	21 1577
	55	1,40 0,057	0,971 1	2,88 −1,32	17 1577
0,12	45	0,485	0,964	2,87	24
	50	0,725 0,036	0,972 1	2,90 −0,839	18 3478
	55	1,03 0,053	0,949 1	2,50 −1,39	13 2899

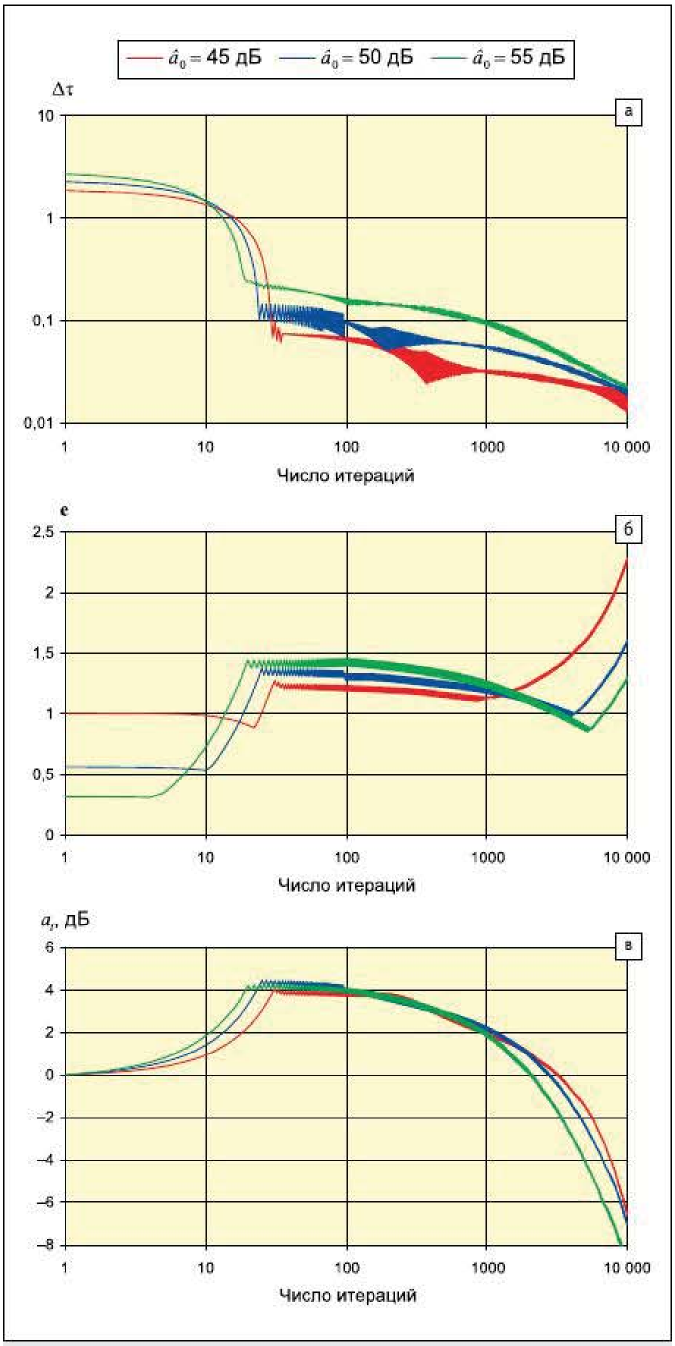

Рис. 5. Зависимости параметров синтезируемого фильтра от числа итераций в МГ для трех значений $\hat{a}_0$ исходного фильтра Золотарева — Кауэра с $N = 5$, $f_1 = 0{,}12$ и $f_2 = 0{,}2$: а) неравномерность $\Delta\tau$; б) ошибка **e**; в) ослабление a_t

Условная оптимизация

В данном случае положим $a_{t\,\min} = 0$ дБ. На рис. 6 представлены зависимости параметров $\Delta\tau$, $\mathbf{e}$ и a_t синтезируемого фильтра от числа итераций в МГ и МГВ для исходной точки с $f_1 = 0{,}08$, $\hat{a} = 55$ дБ. Для этой точки (из девяти ранее упомянутых) МГВ дает наилучший результат. Графики на рис. 6 наглядно иллюстрируют, как видоизменяются зависимости $\Delta\tau$, $\mathbf{e}$ и a_t от числа итераций в случае применения МГВ вместо МГ. На рис. 6а кривая $\Delta\tau$ для МГВ после достижения минимума резко возрастает. На рис. 6б,в наблюдается движение вдоль границ с $\mathbf{e} = 1$ и $a_t = 0$ дБ и резкое нарушение этих границ после 10^3 итераций с последующим нарушением условия устойчивости. Заметим, что резкие колебания кривой для МГВ на рис. 6в после 10^3 итераций обусловлены недостаточным числом точек для оценки a_t.

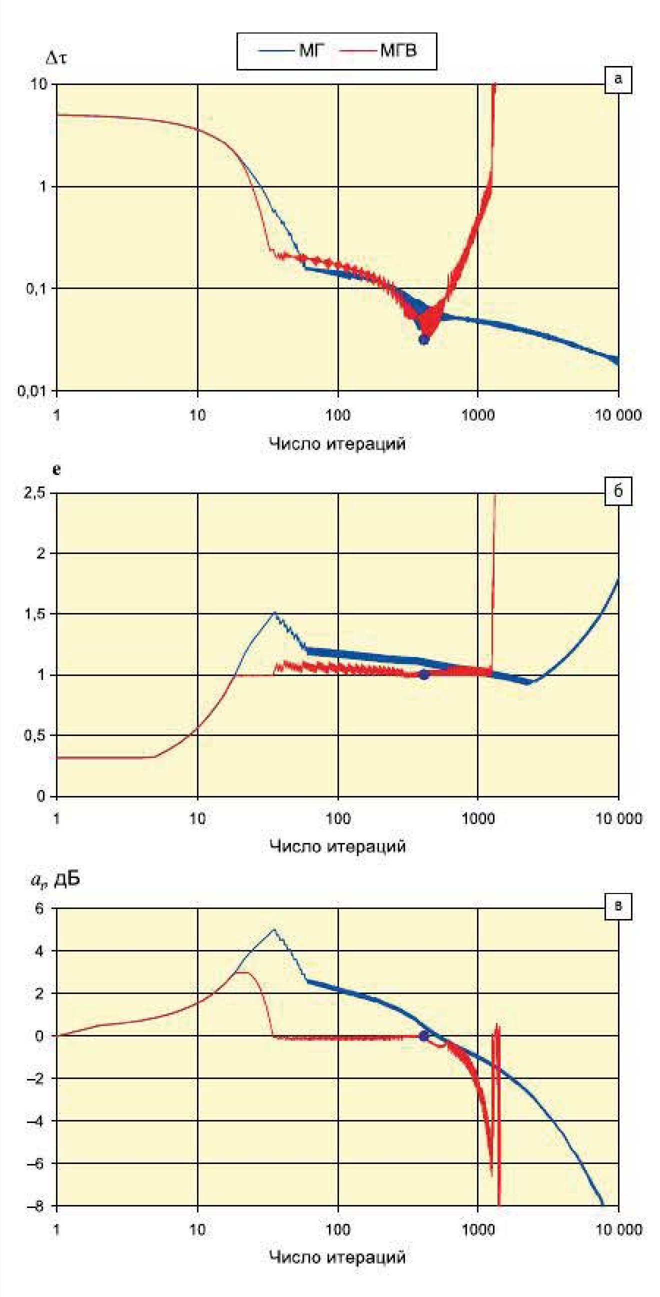

Рис. 6. Зависимости параметров синтезируемого фильтра от числа итераций в МГ и МГВ для исходного фильтра Золотарева — Кауэра с N = 5, $\hat{a}_0$ = 55 дБ, f_1 = 0,08 и f_2 = 0,2: а) неравномерность Δτ; б) ошибка **e**; в) ослабление a_t

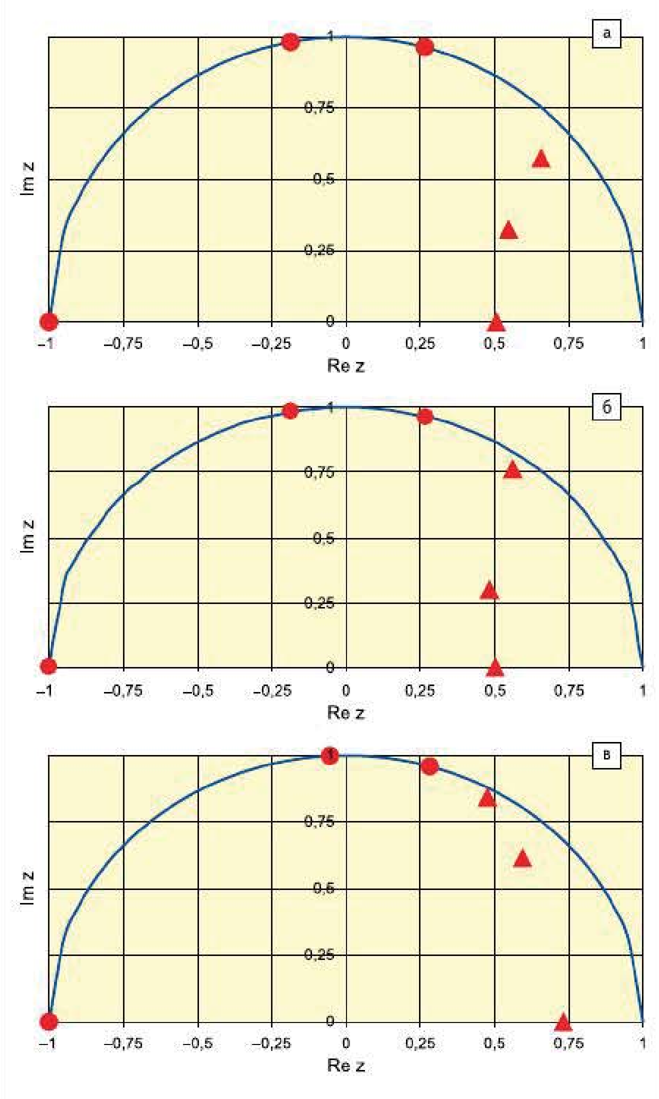

Рис. 7. Карты полюсов/нулей: а) исходного фильтра Золотарева — Кауэра (Δτ = 4,5); б) синтезированного с помощью МГВ фильтра (Δτ = 0,022); в) фильтра Золотарева — Кауэра с минимальной неравномерностью ХГВЗ (Δτ = 1,5)

Однако нет смысла увеличивать это число, поскольку процесс поиска должен быть прерван из-за резкого возрастания Δτ еще до появления этого эффекта. Метки на кривых для МГВ на рис. 6 обозначают решение задачи (5) с Δτ = 0,032, **e** = 1 и a_t = 0,01 дБ.

Благодаря приемам, описанным выше, можно получить фильтр с Δτ = 0,022, **e** = 1 и a_t = 0 дБ. При этом исходный фильтр, рассчитанный для точки f_1 = 0,083, $\hat{a}_0$ = 54 дБ, имеет Δτ = 4,6. Карты полюсов/нулей исходного и оптимизированного фильтров показаны на рис. 7а,б. Как видим, для этих фильтров сильно отличаются лишь позиции доминирующих полюсов. Для сравнения на рис. 7в приведена карта полюсов/нулей для фильтра Золотарева — Кауэра с минимальной неравномерностью ХГВЗ. Хотя для этого фильтра согласно таблице 2 Δτ = 1,5 при N = 5, использование его в качестве исходного дает результат гораздо хуже полученного.

Сравнение результатов

Параметры синтезированных с помощью МГ и МГВ неклассических фильтров сведены в таблице 4. Там же для сравнения даны параметры фильтра Золотарева — Кауэра с минимальной неравномерностью ХГВЗ, взятые из таблицы 2 при N = 5. Как видим, для неклассических фильтров можно получить значительно меньшие значения Δτ, чем для фильтра Золотарева — Кауэра, а именно в 68 раз при $a_t \geq 0$ дБ и в 167 раз при a_t = –0,869 дБ. Найденные фильтры являются минимально-фазовыми и согласно таблице 4 их максимальные значения ХГВЗ в номинальной полосе пропускания не превышают значения для фильтра Золотарева — Кауэра. В случае, когда всплеск АЧХ в переходной полосе недопустим ($a_t \geq 0$ дБ), применение МГВ позволяет для данного примера более чем на порядок уменьшить значение Δτ, полученное с помощью МГ.

В таблице 5 приведены значения Δτ и коэффициентов, на рис. 8а,б — АЧХ, а на рис. 8в — ХГВЗ всех синтезированных фильтров. В номинальной полосе задерживания ($0{,}2 \leq f \leq 0{,}5$) на рис. 8а и в номинальной полосе пропускания ($0 \leq f \leq 0{,}1$) на рис. 8б АЧХ всех фильтров удовлетворяют заданным требованиям. В номинальной полосе пропускания АЧХ трех неклассических фильтров практически совпадают. Наибольшие различия проявляются в переходной полосе по уровням всплесков, которые соответствуют значениям a_t в таблице 4.

Таблица 4. Параметры синтезированных фильтров

Минимально-фазовые фильтры (N = 5)						
Золотарева — Кауэра			Неклассические			
$\Delta\tau$	τ_{max}	a_t, дБ	$\Delta\tau$	τ_{max}	a_t, дБ	Метод
1,5	3,78	0	0,212	3,73	1,38	МГ
			0,009	3,47	−0,80	
			0,022	3,58	0	МГВ

Таблица 5. Значения $\Delta\tau$ и коэффициентов синтезированных фильтров

$\Delta\tau$	i	A_{1i}	A_{2i}	B_{1i}	B_{2i}
1,5	1	−0,95286628	0,93792855	−0,56547128	1
	2	−1,18877729	0,73368931	0,10728159	1
	3	−0,73139252	0	1	0
0,212	1	−1,08353967	0,89569467	−0,54173064	1
	2	−1,00498407	0,36836692	0,30157007	1
	3	−0,53517859	0	1	0
0,009	1	−1,1077361	0,91457912	−0,54386197	1
	2	−0,94693713	0,32414053	0,2851927	1
	3	−0,51708961	0	1	0
0,022	1	−1,12518232	0,90122197	−0,53730226	1
	2	−0,96972502	0,3226689	0,36947927	1
	3	−0,5021865	0	1	0

Согласно представленным результатам уменьшение неравномерности ХГВЗ в номинальной полосе пропускания для всех полученных минимально-фазовых БИХ-фильтров приводит фактически к расширению полосы пропускания. Дополнительного уменьшения этой неравномерности для неклассических фильтров можно достичь, увеличивая всплеск АЧХ в переходной полосе. Интересно, что подобные факты наблюдаются и для неминимально-фазовых БИХ-фильтров [3].

Пример 2. Требования к АЧХ [12]: $\Delta a_{max} = 0{,}5$ дБ, $a_{0\,min} = 32$ дБ, $a_t = 0$ дБ, $f_{1n} = 0{,}25$ и $f_{2n} = 0{,}3$. Этим требованиям удовлетворяет фильтр Золотарева — Кауэра с $N \geq 4$. В данном случае уменьшить минимальные неравномерности ХГВЗ фильтров Золотарева — Кауэра для $N = 4, 5, \ldots, 12$ с помощью МГ, так же как и в [5], не удается. Применение МГВ не приводит к существенным результатам. Например, при $N = 5$ для фильтра Золотарева — Кауэра с минимальной неравномерностью ХГВЗ, соответствующего точке В на рис. 1г, значение $\Delta\tau = 3{,}85$, а для фильтра, найденного с помощью МГВ, — $\Delta\tau = 3{,}76$. Увеличение допустимого всплеска АЧХ до 3 дБ ($a_t = -3$ дБ) также дает мало значимый результат с $\Delta\tau = 3{,}19$. Дальнейшее уменьшение $\Delta\tau$ до 1,75 возможно при допущении $a_t = -20$ дБ. Такое несущественное уменьшение $\Delta\tau$ при сильном снижении требования к a_t можно объяснить узкой относительной переходной полосой. Действительно, в данном примере отношение переходной полосы к полосе пропускания равно 0,2, а в примере 1, для которого получены превосходные результаты, отношение равно 1.

Таким образом, невозможность достаточного расширения полосы пропускания в процессе оптимизации из-за узкой относительной переходной полосы требует допущения очень большого всплеска АЧХ. Однако чрезмерный всплеск АЧХ в переходной полосе может оказаться неприемлемым на практике.

Обсуждаемый пример был рассмотрен в ряде публикаций, и в частности в [3], где при $N = 12$ были получены варианты решений с чрезвычайно малой неравномерностью ХГВЗ, но лишь для неминимально-фазовых фильтров.

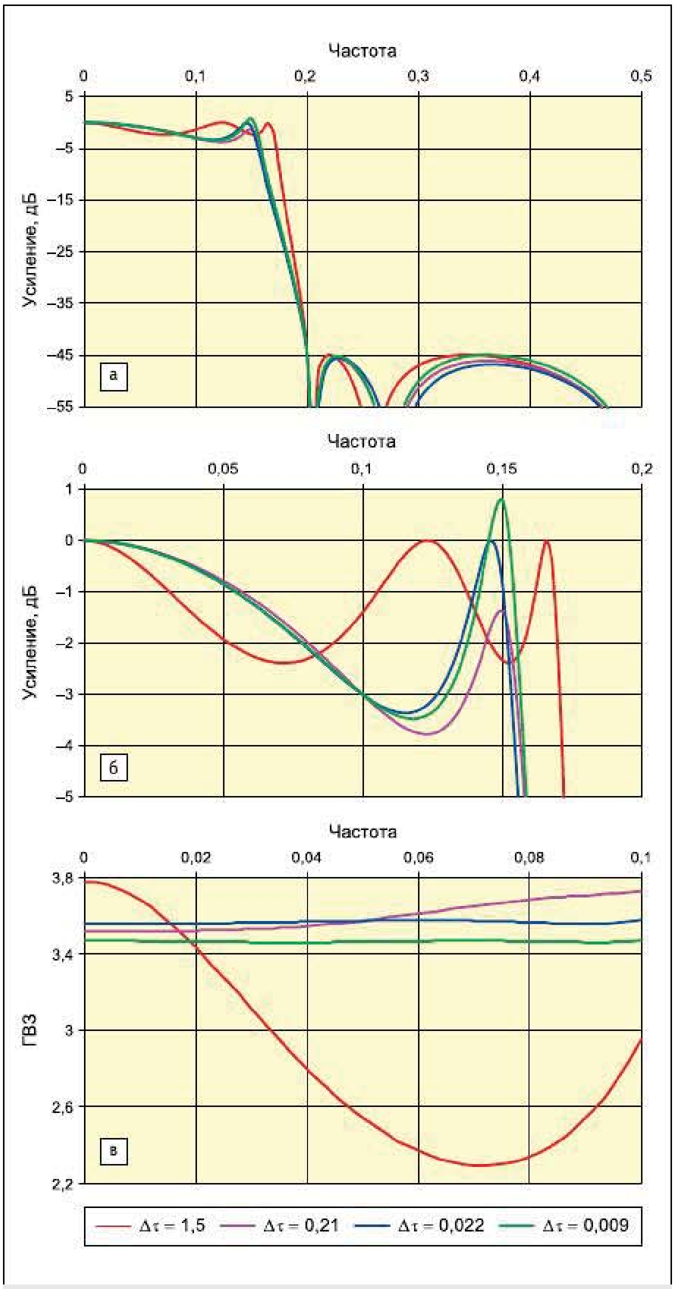

Рис. 8. Частотные характеристики синтезированных БИХ-фильтров:
а) АЧХ в основной полосе;
б) АЧХ в номинальной полосе пропускания и переходной полосе;
в) ХГВЗ в номинальной полосе пропускания

Заключение

Представлены два подхода к синтезу минимально-фазовых БИХ-фильтров с минимальной неравномерностью ХГВЗ в номинальной полосе пропускания и требуемой АЧХ. Хотя рассмотрены только фильтры нижних частот, синтез может быть распространен и на полосовые фильтры.

Первый подход основан на оптимальном выборе исходных параметров АЧХ классических фильтров в пределах определенной области допуска. В зависимости от требований к АЧХ и порядка фильтров, разброс в значениях неравномерности ХГВЗ для точек области может быть очень большим, что оправдывает применение этого подхода. Наименьших неравномерностей ХГВЗ можно достичь для фильтров Золотарева — Кауэра, затем в зависимости от ширины полосы пропускания для фильтров Чебышева II или Чебышева I и лишь потом для фильтров Баттерворта. Дополнительное уменьшение неравномерности ХГВЗ можно получить для большего порядка фильтров. Однако увеличение порядка более чем в два раза малоэффективно.

Второй подход основан на безусловной и условной оптимизации коэффициентов каскадного фильтра с нулями передачи на единичной окружности. При этом ряд фильтров Золотарева — Кауэра используется в качестве исходных. Полученные таким путем неклассические минимально-фазовые фильтры могут иметь значительно меньшие неравномерности ХГВЗ (в частности, в 68 и 167 раз), чем присущие фильтрам Золотарева — Кауэра, найденным с помощью первого подхода. К сожалению, результаты оптимизации сильно зависят от относительной переходной полосы и допустимого уровня всплеска АЧХ в этой полосе. Желание получить узкую переходную полосу и малый допустимый уровень всплеска может свести на нет эффект оптимизации. Для получения существенного результата в случае узкой переходной полосы требуется допущение чрезмерного всплеска АЧХ, что может оказаться неприемлемым на практике. Это ограничивает возможности минимизации неравномерности ХГВЗ минимально-фазовых БИХ-фильтров.

Литература

1. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера. 2012.
2. Saramaki T., Neuvo Y. Digital filters with equiripple magnitude and group delay. IEEE Trans. 1984. ASSP-32. No. 6.
3. Nongpiur R.C., Shpak D.J., Antoniou A. Improved design method for nearly linear-phase IIR filters using constrained optimization. IEEE Trans. on Signal Processing. 2013. V.61. No.4.
4. Мингазин А. Резервы классических аппроксимаций цифровых БИХ-фильтров // Современная электроника. 2012. № 9. (Статью с исправленными опечатками см. на сайте www.radis.ru).
5. Мингазин А.Т. Минимально-фазовые БИХ-фильтры с минимальной неравномерностью ХГВЗ и требуемой АЧХ // 16-я Международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение». (DSPA.) 2014. Т. 1.
6. Пупалайкис П.Д. Групповая задержка и ее влияние на тестирование потоков последовательных данных // Компоненты и технологии. 2007. № 1.
7. Мингазин А.Т. Начальные приближения для синтеза цифровых фильтров с минимальной длиной слова коэффициентов // Электронная техника. 1983. Сер. 10. № 6.
8. Мингазин А.Т. Область допустимых исходных параметров цифровых фильтров Золотарева — Кауэра // 15-я Международная конференция «Цифровая обработка сигналов и ее применение». (DSPA.) 2013. Т. 1.
9. Surma-aho K., Saramaki T. A systematic technique for designing approximately linear phase recursive digital filters. IEEE Trans. CAS-II. 1999. V. 46, No. 7.
10. Карпушкин С.В. Численные методы в проектных расчетах оборудования. Электронное учебное пособие. Тамбов, 2008.
11. Пашкеев С.Д., Минязов Р.И., Могилевский И.Д. Машинные методы оптимизации в технике связи. М.: Связь. 1976.
12. Deczky A.G. Synthesis of recursive digital filters using the minimum p-error criterion. IEEE Trans. 1972. AU-20. No. 4.

новости | коммутаторы

Сетевой коммутатор NM350 от Fastwel

Российская компания Fastwel выпустила сетевой коммутатор NM350 — законченное устройство с шестью каналами Ethernet, четыре из которых поддерживают технологии PoE.

Питание устройства осуществляется через лицевой разъем D-Sub посредством встроенного преобразователя напряжения. В отсутствие подключенных устройств коммутатор рассеивает менее 9 Вт энергии, что позволяет обойтись без дополнительного внешнего охлаждения.

Один из двух каналов NM350, не поддерживающих PoE, можно использовать для подключения к серверу, в то время как к другому — подсоединить еще один модуль NM350, а к нему, в свою очередь, — следующий. Таким образом организуется последовательное каскадирование сетевых коммутаторов. Данный тип соединения нередко задействуют при создании распределенных систем безопасности и видеонаблюдения в общественном транспорте.

Благодаря наличию промышленных разъемов M12 и степени защиты от пыли и влаги IP65 коммутатор может быть установлен вне коммуникационных шкафов на открытом воздухе или в производственных цехах, а также на траспорте.

Ключевые характеристики:

- встроенный коммутатор на 6 каналов Gigabit Ethernet, работающий на канальном (втором) уровне модели OSI;
- четыре порта с поддержкой технологии PoE PSE по стандарту IEEE 802.3af;
- совместимость с устройствами до 15,4 Вт на канал;
- защита от пыли и влаги IP65;
- диапазон рабочих температур: –40...+70 °С.

www.prosoft.ru