

Проектирование БИХ-фильтров: область допустимых исходных параметров фильтров Золотарёва-Кауэра

Александр Мингазин, alexmi@radis.ru

Сергей Гордиенко, gordienko@radis.ru

Александр Гуреев, gureev@org.miet.ru

Область допустимых исходных параметров АЧХ играет важную роль в проектировании частотных цифровых БИХ-фильтров. От выбора исходной точки области зависят параметры частотных и временных характеристик, качество коррекции ХГВЗ или ФЧХ, результаты синтеза фильтров с ограниченной длиной слова коэффициентов, уровни шумов и предельных циклов. Для БИХ-фильтров нижних частот Золотарёва-Кауэра область допустимых исходных параметров представляет собой трехмерную фигуру, математическое описание и качественные конфигурации которой ранее уже неоднократно публиковались. Однако до сих пор реальные конфигурации, построенные для ряда конкретных требований к параметрам АЧХ, не приводились. В данной статье этот пробел устранен; использованы средства трехмерной графики MATLAB. Полученные реальные конфигурации области, сильно отличаясь в определенных случаях от их качественных изображений, способствуют лучшему пониманию и правильному решению проблемы выбора исходных параметров при проектировании БИХ-фильтров.

Введение

Для синтеза частотных БИХ-фильтров вообще и в частности, рассматриваемых здесь широко применяемых на практике фильтров Золотарёва-Кауэра (эллиптических фильтров), необходимо задать требования к параметрам АЧХ, таким как предельно допустимая неравномерность в полосе пропускания, предельно допустимое минимальное ослабление в полосе задерживания и номинальные граничные частоты полос. По этим параметрам определяется порядок фильтра, причем обычно так, что требования выполняются с некоторым запасом. В результате появляется возможность выполнить расчет фильтра (т.е. коэффициентов его передаточной функции), для исходных параметров, которые отличаются от заданных. В частности, это позволяет рассчитать фильтр с экстремально улучшенными АЧХ. Например, при соответствующем задании исходных параметров можно получить АЧХ с минимальной неравномерностью, максимальным ослаблением или максимальной полосой задерживания, т.е. три варианта АЧХ.

В системе MATLAB в среде синтеза и анализа цифровых фильтров FDATool реализованы именно эти три варианта расчета фильтров Золотарёва-Кауэра. Однако возможны и другие варианты. Так, можно одновременно изменить несколько исходных параметров и получить фильтр с альтернативной АЧХ.

На самом деле, существует определенная область допустимых исходных параметров (ДИП) [1], обладающая тем свойством, что расчет фильтра для любой точки этой области приводит к фильтру с допустимой АЧХ, т.е. удовлетворяющей заданным требованиям. Упомянутые три варианта расчета фильтров в среде FDATool соответствуют трем точкам, лежащим на границе области ДИП.

В общем случае конфигурация области ДИП не является тривиальной. Это обусловлено тем известным фактом, что изменение одного из исходных параметров нелинейно меняет диапазоны изменения других. Размерность области ДИП зависит от типа фильтра (Чебышева, Золотарёва-Кауэра и др.) и вида его АЧХ (нижних частот или полосовая), а её размеры - от заданных требований к АЧХ и порядка фильтра. Возможно многие разработчики и не подозревают о существовании области ДИП сложной формы, и о том, что грамотный выбор точки в этой области может приводить к интересным результатам и не только связанным с упомянутым выше улучшением АЧХ.

Наличие области ДИП предоставляет разработчику возможность гибко разминивать значения одних параметров АЧХ проектируемого фильтра на более предпочтительные значения других [2-9]. Кроме того, появляется возможность из множества фильтров с допустимыми АЧХ найти

такой, который обладает наилучшими параметрами ХГВЗ (или ФЧХ) [8,10] или временных характеристик [11]. От выбора исходной точки в области ДИП зависят степень выравнивания ХГВЗ или линеаризации ФЧХ с помощью фазовых корректоров [10], результаты синтеза фильтров с ограниченной длиной слова коэффициентов [1,10,12], уровни шумов [8,12] и предельных циклов [12]. Таким образом область ДИП играет важную роль в проектировании и конечно разработчику желательно хорошо понимать, что представляет собой область ДИП прежде чем искать в ней подходящие точки для получения фильтров с теми или иными свойствами.

Далее ограничимся рассмотрением области ДИП фильтров нижних частот Золотарёва-Кауэра для которых эта область является трехмерной. Ее математическое описание и качественные конфигурации приведены в [1]. Позднее были представлены другие качественные конфигурации [10,13], обусловленные наличием в области зон предельных переходов к фильтрам Чебышева и Баттерворта. В данной статье для ряда конкретных требований к АЧХ приведены типичные реальные конфигурации области ДИП, которые могут в определенных случаях, как оказывается, сильно отличаться от их качественных изображений. Впервые материалы статьи были представлены на конференции DSPA-2016 и часть из них опубликована в трудах [14]. Вначале дадим описание области ДИП удобное для ее построения.

Описание области ДИП

Область ДИП для БИХ-фильтров нижних частот Золотарёва-Кауэра обозначим как $S(\Delta a, f_1, f_2)$. Здесь Δa неравномерностью АЧХ в полосе пропускания, а f_1 и f_2 граничные частоты полосы пропускания и задерживания. От значения этих параметров и порядка фильтра N зависит минимальное ослабление АЧХ в полосе задерживания a_0 .

Систему неравенств [13], описывающую область $S(\Delta a, f_1, f_2)$, представим в виде:

$$\begin{aligned} \Delta a &\leq \Delta a_{\max}, \\ \Delta a &\leq 10 \lg \left(1 + \frac{10^{0,1a_{0\min}} - 1}{\Psi^2(f, f_1, f_2)|_{f=f_2}} \right), \\ \Delta a &\leq 10 \lg \left(1 + \frac{10^{0,1a_{0\min}} - 1}{\Psi^2(f, f_1, f_2)|_{f=f_{2n}}} \right), \\ \Delta a &\leq 10 \lg \left(1 + \frac{10^{0,1\Delta a_{\max}} - 1}{\Psi^2(f, f_1, f_2)|_{f=f_{1n}}} \right), \\ f_2 &< 0,5, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Psi(f, f_1, f_2)$ - характеристическая функция БИХ-фильтров Золотарёва-Кауэра, $\Psi(f_1, f_1, f_2) = 1$, f_{1n} и f_{2n} - номинальные граничные частоты полосы пропускания и задерживания, f - текущая частота, Δa_{\max} и $a_{0\min}$ - заданные предельно допустимые неравномерность и ослабление в соответствующих номинальных полосах.

Описание (1) удобно для построения реальных конфигураций области ДИП, средствами трехмерной графики МАТЛАВ, когда ограниченная поверхность соответствует неравенству вида $z \leq F(x, y)$. Для упрощения записи зависимость функции $\Psi(\cdot)$ от порядка N опущена. Предполагается, что в (1) все частоты нормированы относительно частоты дискретизации, а неравномерности и ослабления выражены в децибелах, причем максимум АЧХ в полосе пропускания нормирован к 0 дБ. Очевидно, что $\Delta a > 0$ и $0 < f_1 < f_2$.

По значениям $f_{1n}, f_{2n}, \Delta a_{\max}$ и $a_{0\min}$ оценивается минимальный порядок фильтра. При необходимости он может быть увеличен, что приводит к увеличению области ДИП, а в некоторых случаях, как будет показано, и к существенному изменению ее формы. Расчет фильтра для любой точки области ДИП приводит к допустимой АЧХ, параметры которой удовлетворяют следующим условиям

$$\hat{\Delta a} \leq \Delta a_{\max} \text{ и } \hat{a}_0 \geq a_{0\min},$$

где символ \wedge - знак соответствия параметров номинальным полосам.

Как видим, область $S(\Delta a, f_1, f_2)$ может быть образована взаимным пересечением двух плоскостей и трёх поверхностей. Для поверхностей, описываемых вторым и третьим соотношением в (1) при знаке равенства в них, ослабление АЧХ в номинальной полосе задерживания $\hat{a}_0 = a_{0min}$, а для поверхности, описываемой четвертым соотношением в (1) при знаке равенства в нем, неравномерность АЧХ в номинальной полосе пропускания $\Delta \hat{a} = \Delta a_{max}$.

В [13] представлены и пояснены качественные конфигурации области $S(\Delta a, f_1, f_2)$, одна из которых описывается первыми четырьмя соотношениями системы (1), а две другие, обусловленные наличием зон предельных переходов к фильтрам Чебышева и Баттерворта, - всей системой. Далее для ряда конкретных требований к параметрам АЧХ на основе (1) построим средствами трехмерной графики MATLAB реальные конфигурации области ДИП и дадим их пояснение.

Реальные конфигурации области ДИП

Реальные конфигурации области ДИП получим для следующих требований к параметрам АЧХ фильтров:

$$\Delta a_{max} = 3 \text{ дБ}, a_{0min} = 62, 55, 45, 35 \text{ и } 25 \text{ дБ}, f_{1n} = 0,1 \text{ и } f_{2n} = 0,2. \quad (2)$$

Можно убедиться, что всем пяти значениям a_{0min} в (2) удовлетворяет с разной степенью запаса фильтр Золотарёва-Кауэра при $N=4$. На рис.1 для этих значений a_{0min} представлены области ДИП, каждая из которых для лучшего восприятия показана в трех ракурсах. Как видим, область ДИП с уменьшением a_{0min} увеличивается, причем с изменением формы.

Характерные точки A, B, C, \dots на рис.1 совпадают с введенными для качественных конфигураций в [10,13]. Координаты точек A, B, \dots, F даны в табл.1, из которой следует, например, что

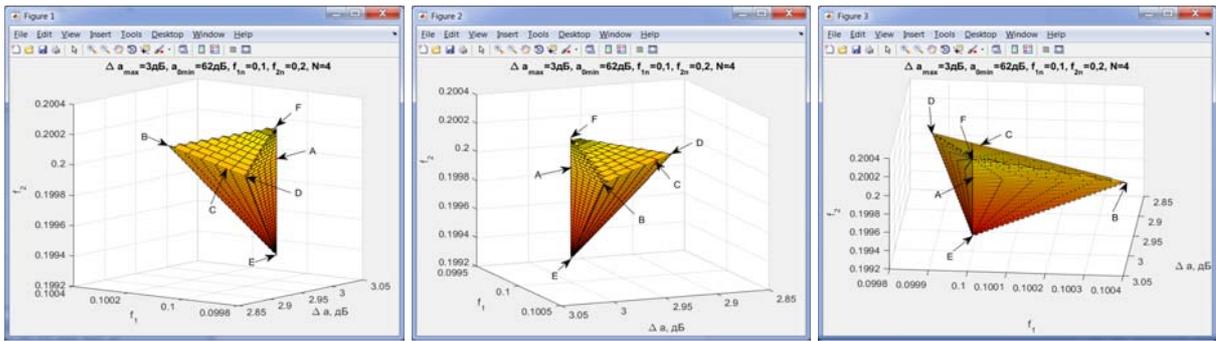
Таблица 1. Координаты точек A, B, \dots, F области ДИП

| Точка | Δa | f_1 | f_2 |
|-------|------------------------|------------|------------|
| A | Δa_{max} | f_{1n} | f_{2n} |
| B | | f_{1max} | |
| C | $\Delta \hat{a}_{min}$ | f_{1n} | |
| D | Δa_{min} | f_{1min} | |
| E | Δa_{max} | f_{1n} | f_{2min} |
| F | | | f_{2max} |

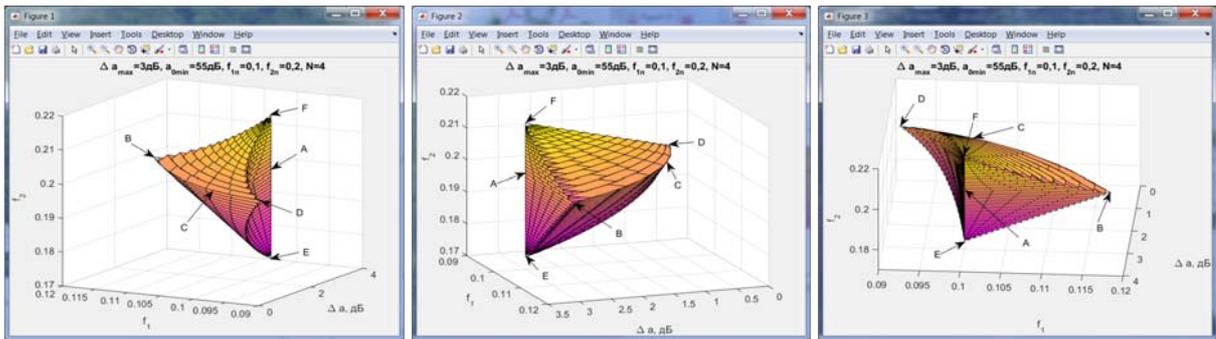
точки A, B, C, D лежат в плоскости $f_2 = f_{2n}$, а точки A и C - на прямой линии $f_1 = f_{1n}, f_2 = f_{2n}$. В табл.1 фигурируют экстремальные параметры $\Delta \hat{a}_{min}, \Delta a_{min}, f_{kmin}, f_{kmax}, k=1,2$ значения которых, рассчитанные по требованиям (2), приведены в табл.2. Заметим, что упомянутые во введении три варианта расчета фильтров в среде FDATool, соответствуют точкам A, E и C .

Таблица 2. Экстремальные значения параметров для требований (2)

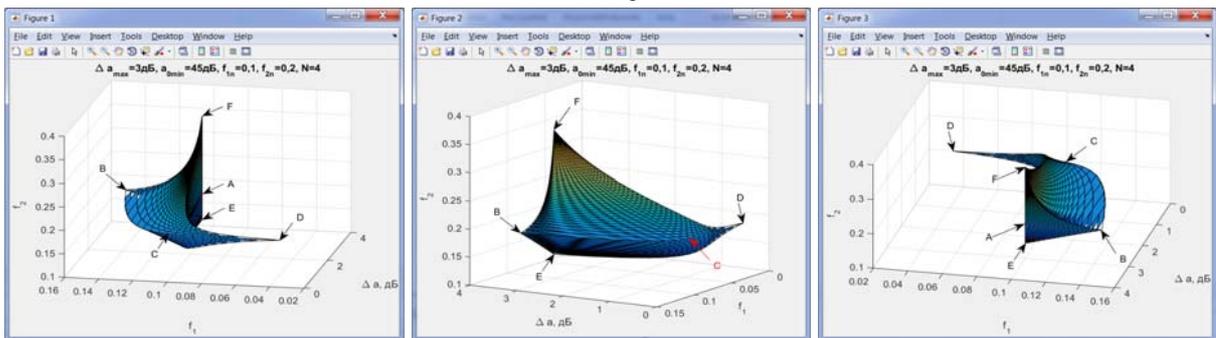
| a_{0min} , дБ | Параметры | | | | | |
|-----------------|-----------------------------|-----------------------|------------|------------|------------|------------|
| | $\Delta \hat{a}_{min}$, дБ | Δa_{min} , дБ | f_{1min} | f_{1max} | f_{2min} | f_{2max} |
| 62 | 2,92 | 2,89 | 0,0999 | 0,1004 | 0,1994 | 0,2002 |
| 55 | 0,76 | 0,317 | 0,0906 | 0,118 | 0,1737 | 0,216 |
| 45 | 0,082 | 7,7e-6 | 0,0339 | 0,1445 | 0,1434 | 0,3646 |
| 35 | 0,0083 | 0 | 0 | 0,1695 | 0,1213 | 0,5 |
| 25 | 0,00083 | 0 | 0 | 0,1883 | 0,1075 | 0,5 |



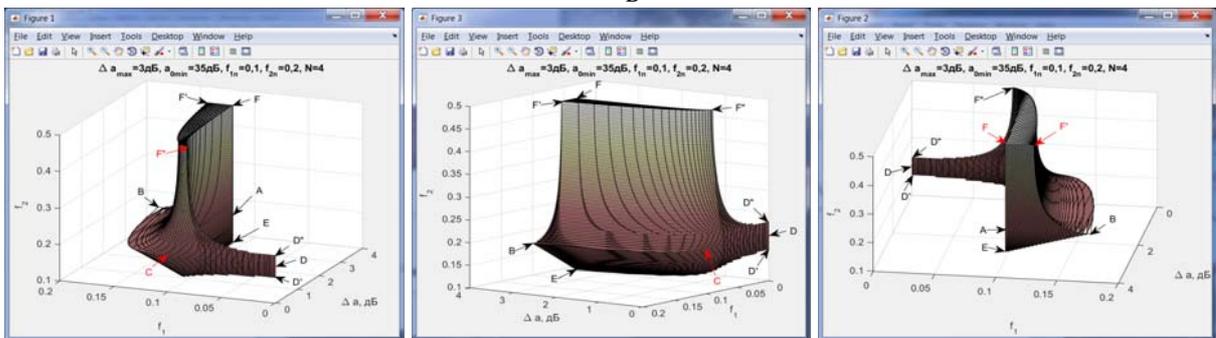
а



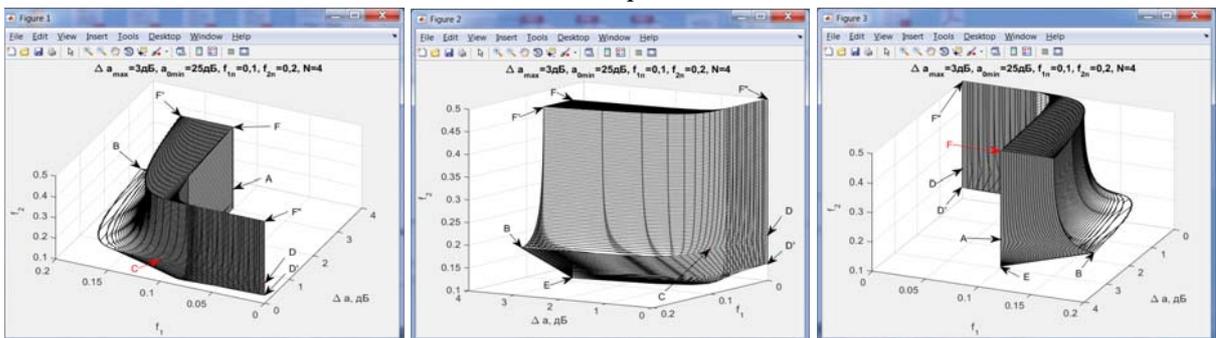
б



в



г



д

Рис.1. Три ракурса области ДИП: а) $a_{0min} = 62$ дБ, б) $a_{0min} = 55$ дБ, в) $a_{0min} = 45$ дБ, г) $a_{0min} = 35$ дБ, д) $a_{0min} = 25$ дБ

Конфигурации области ДИП на рис.1а-в образованы пересечением плоскости и трех поверхностей. Плоской грани BEF соответствует первое, а трем поверхностям BDE , BDF и DEF - второе, третье и четвертое соотношение в (1) при знаке равенства в них.

Области ДИП, построенные на рис.1а и 1б для $a_{0min}=62$ и 55дБ, схожи с качественной конфигурацией в [13]. Однако область, построенная на рис.1в для $a_{0min}=45$ дБ имеет более сложную форму, отличаясь тем, что три поверхности области перед пересечением в точке D , образуют протяженный и сильно уплощенный участок, который вплотную примыкает своей плоской поверхностью к воображаемой плоскости $\Delta a=0$. При уменьшении ослабления до $a_{0min}=44,116$ дБ в точках D и F имеют место предельные переходы соответственно к единственному фильтру Чебышева II и единственному фильтру Чебышева I. При этом в точке D справедливо равенство $f_1=\Delta a=0$, а в точке F - равенство $f_2=0,5$. Этот случай в [13] выделен особо.

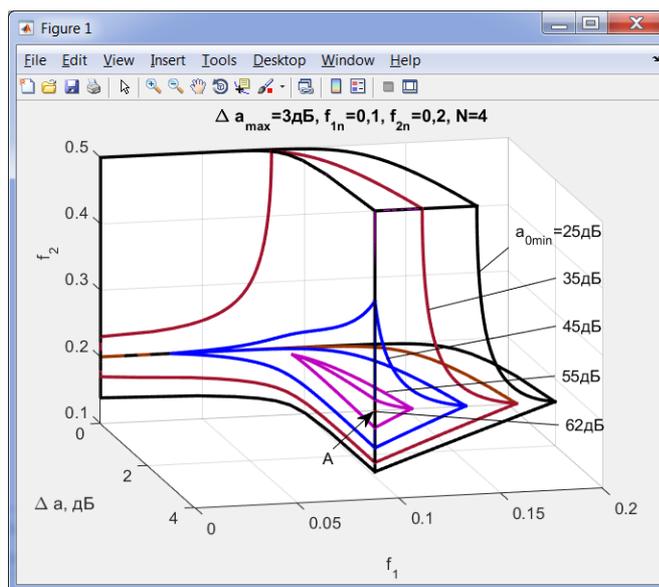


Рис.2. Области ДИП для пяти значений ослабления a_{0min}

Реальная конфигурация области ДИП на рис.1г или 1д, также, как и на рис.1в, отличается от соответствующей качественной конфигурации в [13], протяженным и сильно уплощенным участком. При ослаблении $a_{0min} < 44,116$ дБ конфигурация на рис.1в претерпевает существенные изменения, как показано на рис.1г при $a_{0min}=35$ дБ. Здесь обсуждаемый участок области становится более протяженным и уплощенным, еще более примыкающим к воображаемой плоскости $\Delta a=0$, расширенным по координате f_2 и заканчивается отрезком прямой $D'D''$, включающим точку D , для которого $f_1=\Delta a=0$. Кроме того, появляется плоская грань $FF'F''$, обусловленная последним соотношением в (1) при знаке равенства в нем. Как показывают наблюдения дальнейшее уменьшение ослабления a_{0min} приводит к продолжению характерных изменений обсуждаемого участка области, к увеличению площади грани $FF'F''$ и слиянию точек D'' и F'' при $a_{0min} \leq 27,945$ дБ. Соответствующая конфигурация области ДИП изображена на рис.1д при $a_{0min}=25$ дБ, где точка D'' не показана. На рис.1г и 1д во всех точках отрезков $D'D''$ и $D'F''$ имеет место предельный переход к фильтрам Чебышева II, а во всех точках граней $FF'F''$ - предельный переход к фильтрам Чебышева I. Исключением является точка F'' на рис.1д, где имеет место предельный переход к фильтрам Баттерворта.

На рис.2 на одном графике приведены пять рассмотренных конфигураций области ДИП без расцветивания образующих поверхностей и плоскостей, что позволяет наглядно судить об их относительных размерах и расположении. Область на рис.1а из-за общего масштаба здесь сливается с точкой A . Заметим, что для всех областей на рис.2 совпадают лишь характерные точки A и каждая большая область содержит в себе меньшую, что похоже на своеобразную матрёшку.

Далее покажем, как изменяется в размерах и деформируется область ДИП в зависимости от значений параметров Δa_{max} , f_{1n} , f_{2n} и порядка фильтра N .

Дополнительные иллюстрации

На рис.3а-3г иллюстрируется изменение области ДИП в зависимости от значений $\Delta a_{max}=3, 2, 1, 0, 1$ дБ, $f_{1n}=0, 1, 0, 115, 0, 125, 0, 14, f_{2n}=0, 2, 0, 18, 0, 16, 0, 145$ и $N=4-9$. В поле этих рисунков даны фиксированные значения параметров и порядка. Все области, как и на рис.2, показаны без расцветивания образующих поверхностей и плоскостей. На каждом рисунке красным цветом отмечено положение характерной точки *A* для каждой области и, кроме того, указана точка *C, B, E* или *A* общая для всех областей.

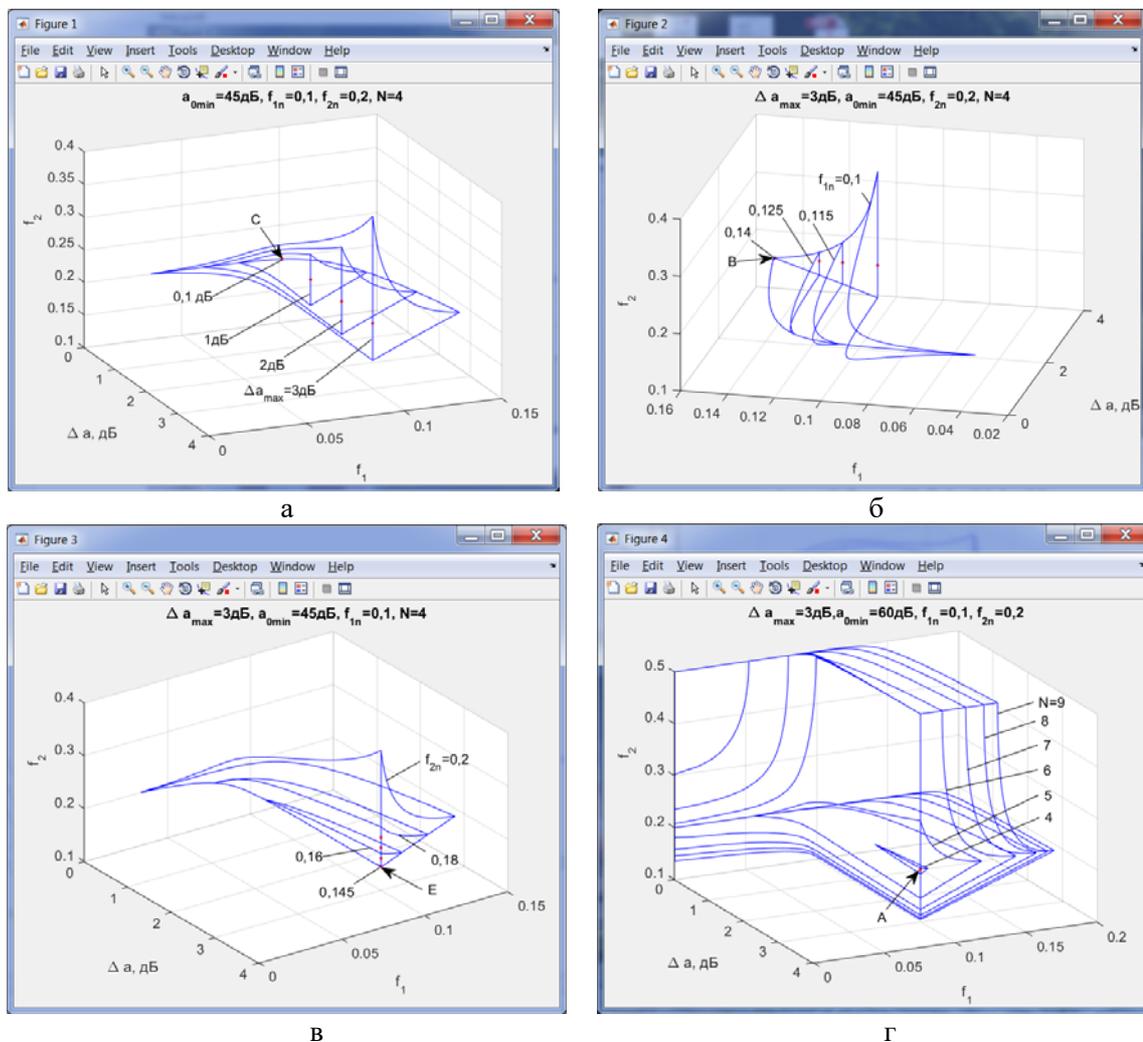


Рис.3. Области ДИП для ряда значений а) Δa_{max} , б) f_{1n} , в) f_{2n} , г) N

Как видим с уменьшением Δa_{max} на рис.3а, с увеличением f_{1n} на рис.3б и с уменьшением f_{2n} на рис.3в область ДИП уменьшается. При $\Delta a_{max}=0, 1$ дБ, $f_{1n}=0, 14$ и $f_{2n}=0, 145$ область ДИП на соответствующих рисунках сливается с точкой *C, B* и *E*. При увеличении N на рис.3г область ДИП увеличивается. Для $N > 5$ появляются зоны предельных переходов от фильтров Золотарёва-Кауэра к фильтрам Чебышева (при $5 < N < 9$) и фильтрам Чебышева и Баттерворта (при $N=9$). Отметим, что при жестких требованиях к параметрам АЧХ зоны предельных переходов образуются при значениях N много больших, чем минимальный порядок фильтра Золотарёва-Кауэра.

Заключение

Представленные реальные конфигурации трехмерной области ДИП цифровых БИХ-фильтров нижних частот Золотарёва-Кауэра могут существенно отличаться от их качественных изображений, опубликованных ранее, а именно протяженными и сильно уплощенными участками. Приведенные конфигурации области ДИП, построенные для конкретных требований к АЧХ, яв-

ляются типичными, поскольку при других требованиях изменяются лишь их пропорции. Кроме того, при замене граничных частот f_1 на $0,5 \cdot f_1$ и f_2 на $0,5 \cdot f_2$ и смене направлений осей частот на графиках эти конфигурации становятся типичными и для фильтров верхних частот. Тем не менее, представляется, что построение реальных конфигураций области ДИП для тех или иных требований к АЧХ поможет разработчикам глубже осознать и удачно решить проблему выбора исходных параметров при проектировании БИХ-фильтров с теми или иными свойствами.

Литература

1. Мингазин А.Т. Начальные приближения для синтеза цифровых фильтров с минимальной длиной слова коэффициентов. // Электронная техника. 1983. Сер.10. № 6. Р. 3-8.
2. Савченко С.М., Смирнов Э.Е. Улучшение частотных характеристик эллиптических фильтров. Изв. вузов СССР. Сер. Радиоэлектроника. 1976. Т. XIX. № 6. С. 113-116.
3. Мингазин А.Т. Способ улучшения характеристик затухания фильтров. Радиотехника. 1985. № 9. С. 89-91.
4. Vlcek M., Unbehauen R. Degree, ripple and transition width of elliptic filters. IEEE Trans. 1989. CAS-36. No. 3. P. 469-472.
5. Мингазин А.Т. Экстремальные параметры аналоговых и цифровых фильтров. Электро-связь. 1999. № 1. С. 22-23.
6. Tomic D.V., Lutovac M. D., Evans B.L. Advanced digital IIR filter design. ECCTD. 1999. P.1323-1326.
7. Corral C.A., Lindquist C.S. Design for optimum classical filters. Proc. IEE Circuit Devices Syst. 2002. Vol. 149. No. 5/6. P.291-301.
8. Алёшин Д.В., Мингазин А.Т. Программа для расчета экстремальных параметров цифровых и аналоговых фильтров и ее применение. Цифровая обработка сигналов. 2006. № 1. Р.45-49.
9. Dimopoulos H.G. Optimal use of some classical approximations in filter design. IEEE Trans. 2007. CAS-II. Vol. 54. No. 9. P.780-784.
10. Мингазин А. Резервы классических аппроксимаций цифровых БИХ-фильтров. Современная электроника. 2012. №9. С.62-71. (Статью с исправленными опечатками см. на сайте www.radis.ru).
11. Holt A.G.J., Gray J.P., Fidler J.K. Transient response of elliptic function filters. IEEE Trans. 1968. CT-15. March. P. 71-73.
12. Antoniou A., Charalambous C., Motamedi Z. Two methods for the reduction of quantization effects in recursive digital filters. IEEE Trans. 1983. CAS-30. No.3. P. 160-166.
13. Мингазин А.Т. Область допустимых исходных параметров цифровых фильтров Золотарёва-Кауэра//15-я Международная конференция 'Цифровая обработка сигналов и ее применение'. (DSPA). 2013. Т.1. С.125-128.
14. Мингазин А.Т., Гордиенко С.В., Гуреев А.В. Реальные конфигурации области допустимых исходных параметров БИХ-фильтров Золотарёва-Кауэра//18-я Международная конференция 'Цифровая обработка сигналов и ее применение'. (DSPA). 2016. Т.1. С.265-271.