

## МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫЕ БИХ-ФИЛЬТРЫ С МИНИМАЛЬНОЙ НЕРАВНОМЕРНОСТЬЮ ХГВЗ

Мингазин А.Т.

РАДИС Лтд, Россия, Москва, Зеленоград, 124460, а/я 20.  
Тел./факс. 499-735-35-13, e-mail: [alexmin@radis.ru](mailto:alexmin@radis.ru)

**Аннотация.** Представлены два подхода к синтезу минимально-фазовых цифровых БИХ-фильтров с минимальной неравномерностью ХГВЗ в полосе пропускания и требуемой АЧХ. В первом из них оптимизируются исходные параметры АЧХ классических фильтров Золотарёва-Кауэра, Чебышева и Баттерворта, а во втором - коэффициенты каскадной передаточной функции фильтра с нулями передачи на единичной окружности. Численные результаты, показывают, что первый подход приводит к хорошим результатам, но неклассические минимально-фазовые БИХ-фильтры, полученные с помощью второго подхода, могут иметь значительно меньшие неравномерности ХГВЗ. Степень уменьшения зависит от требований к АЧХ.

### Введение

Известно, что нули передаточной функции минимально-фазовых цифровых БИХ-фильтров находятся внутри единичной окружности комплексной  $z$ -плоскости. Классические БИХ-фильтры полученные на основе билинейного преобразования аналоговых фильтров-прототипов Золотарёва-Кауэра, Чебышева, Баттерворта и др. имеют нули на единичной окружности и, согласно [1] не являются строго минимально-фазовыми, но обладают рядом их свойств. Поэтому далее будем называть эти фильтры, как и в ряде других публикаций, минимально-фазовыми.

Известно также, что БИХ-фильтры часто оказываются непригодными из-за свойственной им большой неравномерности ХГВЗ в полосе пропускания. Из существующих методов уменьшения этой неравномерности выделим следующие:

- Коррекция неравномерности ХГВЗ фильтра с приемлемой АЧХ оптимизированной фазовой (всепропускающей) цепью.
- Минимизация неравномерности ХГВЗ полюсного БИХ-фильтра с последующей коррекцией его АЧХ оптимизированным КИХ-фильтром с линейной ФЧХ.
- Минимизация неравномерности ХГВЗ БИХ-фильтра при заданных допусках на отклонение АЧХ без ограничения на расположение нулей передачи.
- Минимизация неравномерности ХГВЗ классических БИХ-фильтров путем оптимального выбора исходных параметров АЧХ.
- Минимизация неравномерности ХГВЗ БИХ-фильтра с нулями передачи на единичной окружности при заданных допусках на отклонение АЧХ.

Широко распространенный первый из перечисленных метод может приводить к завышенному результирующему порядку фильтра. Второй [2] - позволяет получить экстремально малые неравномерности ХГВЗ в сравнении с первым методом (особенно для узкополосных фильтров). Третий [3] - дает экстремально малые неравномерности ХГВЗ в сравнении с первым и некоторыми другими конкурирующими методами. Четвертый [4] - не всегда приводит к желаемым результатам. Пятый [5] - позволяет улучшить решения, получаемые четвертым методом.

Все эти методы минимизации неравномерности ХГВЗ отличаются степенью сложности и за исключением четвертого и пятого метода, приводят к неминимально-фазовым БИХ-фильтрам, которым в отличие от минимально-фазовых БИХ-фильтров характерна переходная характеристика с длительным временем нарастания, что нежелательно в ряде приложений, например, в измерительной технике и некоторых системах телекоммуникации и связи [6].

В данной статье внимание сосредоточим на проблемах минимизации неравномерности ХГВЗ в полосе пропускания минимально-фазовых БИХ-фильтров нижних частот. Рассмотрим оба выше упомянутых метода, вначале - основанный на оптимальном выборе исходных параметров АЧХ четырех классических БИХ-фильтров (Баттерворта, Чебышева I, II и Золотарёва-Кауэра), а затем метод, основанный на оптимизации коэффициентов каскадных БИХ-фильтров с нулями передачи на единичной окружности. Минимально-фазовые БИХ-фильтры, полученные вторым методом, будем называть здесь неклассическими.

## Классические БИХ-фильтры с минимальной неравномерностью ХГВЗ

В начале определим области допустимых исходных параметров четырех классических БИХ-фильтров Баттерворта, Чебышева I, II и Золотарева-Кауэра. Затем рассмотрим решение задачи поиска в каждой из областей оптимальной точки, соответствующей фильтру с минимальной неравномерностью ХГВЗ в полосе пропускания и представим численные результаты.

### Области допустимых исходных параметров

Области допустимых исходных параметров  $S(\mathbf{p})$ , для обсуждаемых БИХ-фильтров нижних частот показаны на рис.1. Это лишь качественные фигуры, хотя по конкретным требованиям к АЧХ, можно построить точные конфигурации областей. Компонентами вектора  $\mathbf{p}$ , размерность которого не превышает трех, могут быть следующие исходные параметры:  $\Delta a$  - неравномерность АЧХ в полосе пропускания,  $a_0$  - минимальное ослабление в полосе задерживания, а также  $f_1$  и  $f_2$  - граничные частоты полосы пропускания и задерживания. Расчет фильтра для любой точки той или иной области приводит к допустимой АЧХ, параметры которой удовлетворяют следующим условиям

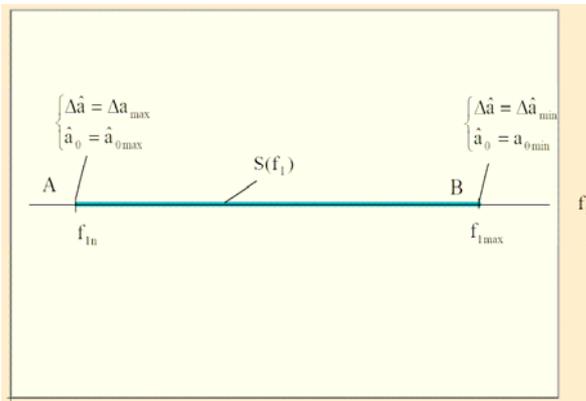
$$\hat{\Delta a} \leq \Delta a_{\max}, \hat{a}_0 \geq a_{0\min}, \quad (1)$$

где  $\hat{\Delta a}$  - неравномерность АЧХ в номинальной полосе пропускания ( $0 \leq f \leq f_{1n}$ ),  $\hat{a}_0$  - минимальное ослабление АЧХ в номинальной полосе задерживания ( $f_{2n} \leq f \leq 0,5$ ), а  $\Delta a_{\max}$  и  $a_{0\min}$  - заданные допуски по неравномерности и ослаблению, частоты  $f_{1n}$ ,  $f_{2n}$  и  $f$  нормированы относительно частоты дискретизации.

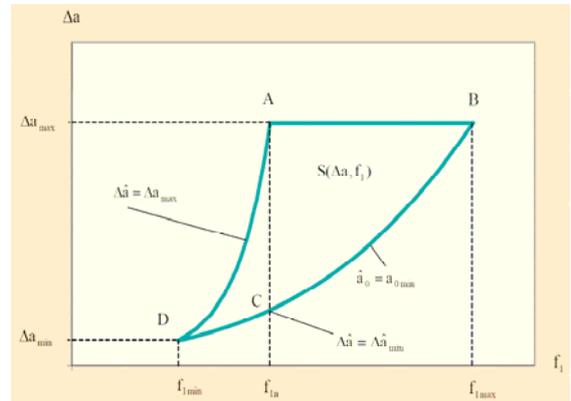
В обозначениях задаваемых допусков в (1) знак  $\wedge$  соответствия номинальной полосе не используется, поскольку всегда  $\hat{\Delta a}_{\max} = \Delta a_{\max}$  и  $\hat{a}_{0\min} = a_{0\min}$ . Предполагается, что параметры в (1) выражены в децибелах и максимум АЧХ в полосе пропускания нормирован к 0 дБ. По значениям  $f_{1n}$ ,  $f_{2n}$ ,  $\Delta a_{\max}$  и  $a_{0\min}$  оценивается порядок фильтра  $N$ . Строгим равенствам в (1) соответствует целое  $N$ , точечная область  $S(\mathbf{p})$  и лишь один вариант расчета фильтра.

На рис.1 наряду с допусками  $\Delta a_{\max}$ ,  $a_{0\min}$  и номинальными частотами  $f_{1n}$  и  $f_{2n}$  фигурируют экстремальные параметры  $\hat{\Delta a}_{\min}$ ,  $\hat{a}_{0\max}$ ,  $\Delta a_{\min}$ ,  $a_{0\max}$  и  $f_{i\min}$ ,  $f_{i\max}$ ,  $i=1,2$ . Характер-

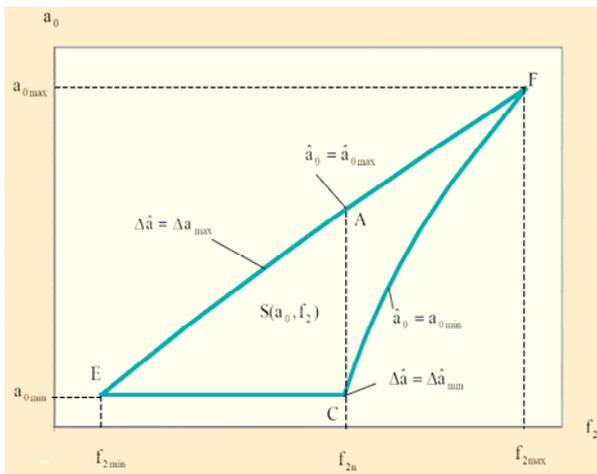
ные точки на рис.1 помечены буквами А, В, С,... На рис. 1б и 1в отмечены также кривые, а на рис.1г-1е - поверхности постоянства  $\Delta\hat{a}$  и  $\hat{a}_0$ .



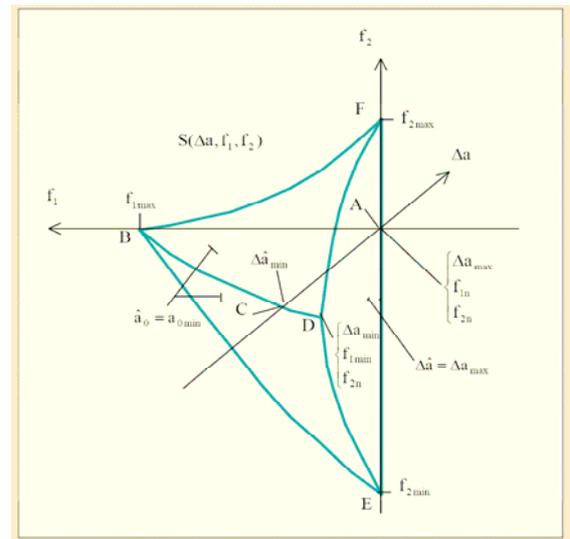
а



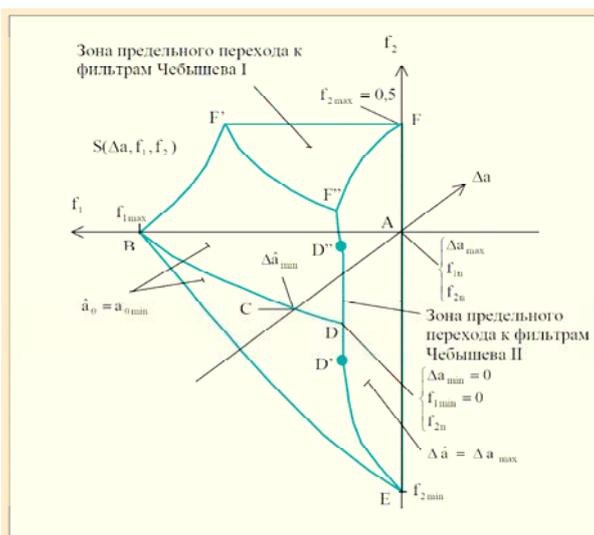
б



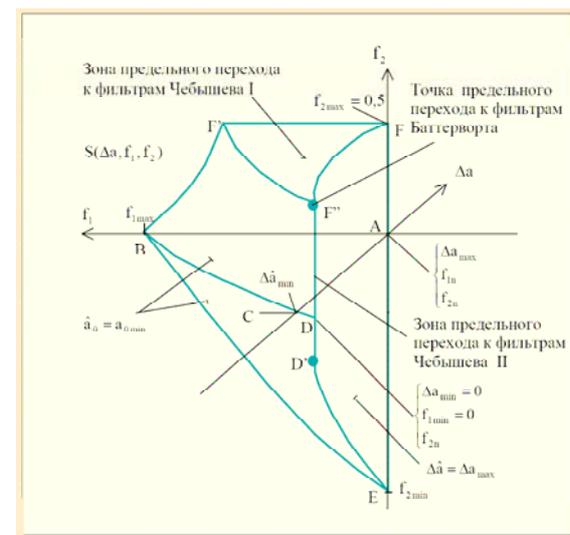
в



г



д



е

Рис.1. Области допустимых исходных параметров фильтров: а) Баттерворта, б) Чебышева I, в) Чебышева II, г) - е) Золотарёва-Кауэра

Неявные выражения для описания областей  $S(\mathbf{p})$  даны в табл.1. Здесь  $a(\cdot)$  - характеристики ослабления, а  $\Phi(\cdot)$  - функции для определения порядков обсуждаемых фильтров. Для упрощения записи зависимость неявных функций  $a(\cdot)$  и  $\Phi(\cdot)$  от  $N$  опущена.

Таблица 1. Описание областей допустимых исходных параметров

Области $S(\mathbf{p})$ фильтров нижних частот			
Баттерворта	Чебышева I	Чебышева II	Золотарёва-Кауэра
$S(f_1)$	$S(\Delta a, f_1)$	$S(a_0, f_2)$	$S(\Delta a, f_1, f_2)$
$f_1 \geq f_{1n}$ $N \geq \Phi(\Delta a_{\max}, a_{0\min}, f_1, f_{2n})$	$\Delta a \leq \Delta a_{\max}$ $N \geq \Phi(\Delta a, a_{0\min}, f_1, f_{2n})$ $a(f, \Delta a, f_1) _{f=f_{1n}} \leq \Delta a_{\max}$	$a_0 \geq a_{0\min}$ $N \geq \Phi(\Delta a_{\max}, a_0, f_{1n}, f_2)$ $a(f, a_0, f_2) _{f=f_{2n}} \geq a_{0\min}$	$\Delta a \leq \Delta a_{\max}$ $N \geq \Phi(\Delta a, a_{0\min}, f_1, f_2)$ $a(f, \Delta a, f_1, f_2) _{f=f_{1n}} \leq \Delta a_{\max}$ $a(f, \Delta a, f_1, f_2) _{f=f_{2n}} \geq a_{0\min}$ $f_2 < 0,5$

Для фильтров Баттерворта область  $S(\mathbf{p})=S(p_1)=S(f_1)$  или  $S(p_1)=S(\Delta a)$  полностью определяется диапазоном изменения параметра  $f_1$  или  $\Delta a$ . На рис.1а показана область  $S(f_1)$  в виде отрезка прямой АВ. Для фильтров Чебышева I двумерная область  $S(\Delta a, f_1)$  с характерными точками А, В, С, D представлена на рис.1б, а для фильтров Чебышева II двумерная область  $S(a_0, f_2)$  с характерными точками А, С, Е, F - на рис.1в.

Для фильтров Золотарёва-Кауэра трехмерная область  $S(\Delta a, f_1, f_2)$  может иметь три вида конфигураций, показанных на рис.1г-1е. Начало координат помещено в точку А. Точки А, В, С, D лежат в плоскости  $f_2=f_{2n}$ . Область на рис.1г образована пересечением плоскости BEF и трех поверхностей BDE, BDF и DEF, которым соответствует первое, второе, третье и четвертое соотношение в табл.1 при знаке равенства в них. Области на рис.1д и 1е обусловлены предельными переходами, согласно схеме на рис.2. Зоны предельных

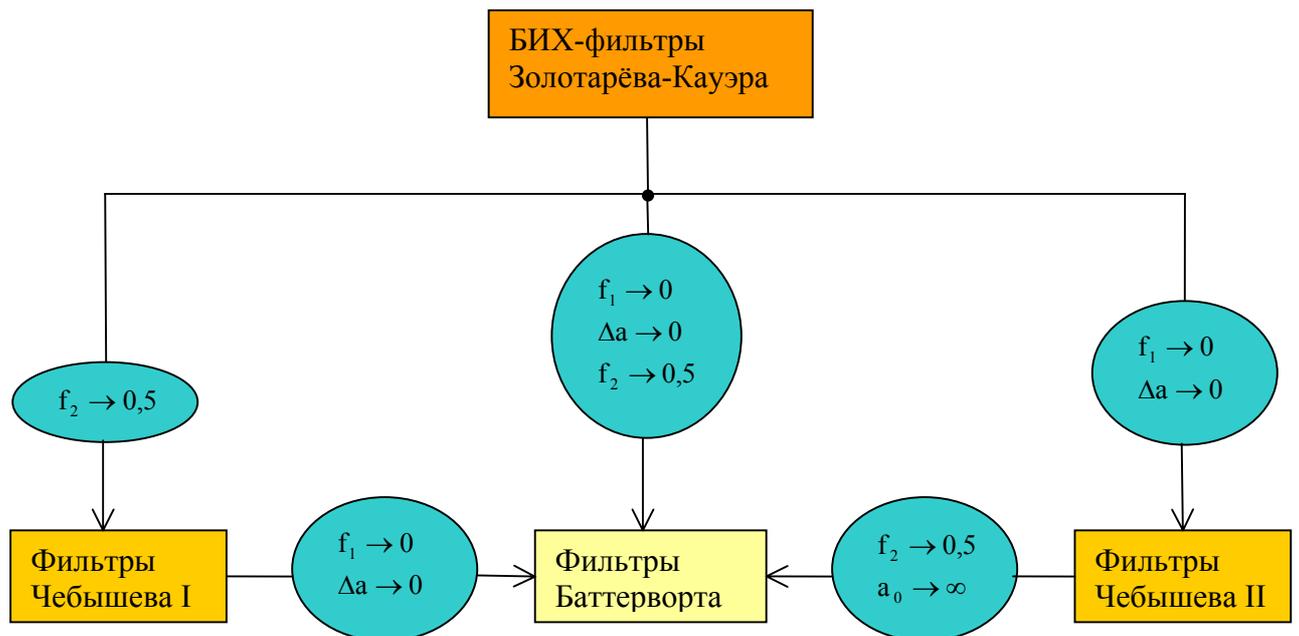


Рис.2. Схема предельных переходов

переходов от фильтров Золотарёва-Кауэра к фильтрам Чебышева показаны на рис.1д, а к фильтрам Чебышева и Баттерворта - на рис.1е. Для образовавшихся плоских граней FFF'' имеем  $f_2=0,5$  (последнее соотношение для фильтров Золотарёва-Кауэра в табл.1 при знаке равенства в нем), а для появившихся отрезков прямых D'D'' на рис.1д и D'F' на рис.1е -  $\Delta a = f_1 = 0$ .

Если вернуться к областям фильтров Чебышева I и II на рис.1б и 1в, то здесь, пользуясь схемой на рис.2, можно указать точки возможного предельного перехода к фильтрам Баттерворта. На рис.1б это точка D при  $\Delta a = \Delta a_{\min} = 0$  и  $f_1 = f_{1\min} = 0$ , а на рис.1в - точка F при  $a_0 = a_{0\max} = \infty$  и  $f_2 = f_{2\max} = 0,5$  (в [4] вместо точки F ошибочно говорится об отрезке прямой).

Заметим, что предельный переход от одного фильтра к другому имеет место, если для каждого из этих фильтров одинакового порядка выполняются условия (1).

Области  $S(\mathbf{p})$  на рис.1а-1г были ранее представлены в [7], на рис.1а-1г,1е - в [4] и на рис.1г-1е - в [8]. В работах [7,8] даны математические описания областей в явной и неявной форме. Более детальное пояснение предельных переходов дано в [4,8].

### **Оптимальные точки областей**

Допустим, что область  $S(\mathbf{p})$  фильтра Золотарёва-Кауэра представляет собой точку, что соответствует строгим равенствам в (1). В этой ситуации фильтры Золотарёва-Кауэра обладают не только глобально оптимальной АЧХ, что им свойственно, независимо от размера  $S(\mathbf{p})$ , но и глобально оптимальной ХГВЗ, которая в конкретных случаях может оказаться совершенно неприемлемой. Подобные рассуждения можно отнести и к трем другим обсуждаемым здесь классическим фильтрам, АЧХ которых являются в определенном смысле глобально оптимальными. Получить лучшее соотношение между параметрами АЧХ и ХГВЗ можно лишь в случае неточечной области  $S(\mathbf{p})$ , подобрав вектор исходных параметров  $\mathbf{p}$  или рассчитав минимально-фазовый БИХ-фильтр другими методами.

Задачу синтеза классических БИХ-фильтров с минимальной неравномерностью ХГВЗ можно сформулировать как

$$\begin{aligned} \Delta\tau(\mathbf{p}) &= \tau_{\max}(\mathbf{p}) - \tau_{\min}(\mathbf{p}) \rightarrow \min, \\ \Delta\hat{a}(\mathbf{p}) &\leq \Delta a_{\max}, \quad \hat{a}_0(\mathbf{p}) \geq a_{0\min}, \\ \mathbf{p} &\in S(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\Delta\tau$  - неравномерность ХГВЗ в номинальной полосе пропускания, а  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$  - максимальное и минимальное значения ХГВЗ в этой полосе. Положим для дальнейшего, что эти параметры ХГВЗ выражены в отсчетах частоты дискретизации.

Решить поставленную задачу аналитически, затруднительно из-за сложности функций входящих в (2). Решения были получены косвенным путем в [4]. На основе результатов прямого исследования областей  $S(\mathbf{p})$  на рис.1 и известных фактов о взаимосвязи параметров АЧХ и о влиянии их на неравномерность ХГВЗ сделаны следующие выводы.

Для фильтров Баттерворта минимуму  $\Delta\tau$  соответствует точка В в  $S(f_1)$  на рис.1а, а для фильтров Чебышева II - точка С в  $S(a_0, f_2)$  на рис.1в. Для фильтров Чебышева I и Золотарёва-Кауэра минимум  $\Delta\tau$  расположен в некоторой точке на кривой BD, соответственно в областях  $S(\Delta a, f_1)$  на рис.1б и  $S(\Delta a, f_1, f_2)$  на рис.1г-1е. Процедура нахождения такой оптимальной точки сводится к поиску минимума функции одной переменной, что легко выполнить на дискретном наборе частот  $f_1$ . Фильтры Золотарёва-Кауэра имеют наименьшую неравномерность  $\Delta\tau$ , фильтры Баттерворта - наибольшую. Фильтры Чебышева занимают промежуточное положение, причем предпочтительнее фильтры Чебышева II, но при очень

широкой полосе пропускания фильтры Чебышева I могут иметь несколько меньшие  $\Delta\tau$ , чем фильтры Чебышева II.

### Численные результаты

Проиллюстрируем описанные способы выбора оптимальных точек в областях  $S(\mathbf{p})$  на рис.1 для следующих требований к АЧХ:

$$\Delta a_{\max} = 3 \text{ дБ}, a_{0\min} = 45 \text{ дБ}, f_{1n} = 0,1, f_{2n} = 0,2. \quad (3)$$

На рис.3 для обсуждаемых фильтров представлены семейства зависимостей неравномерности ХГВЗ  $\Delta\tau$  от исходных параметров областей  $S(\mathbf{p})$ , построенные для требований (3). Точки А, В, С,... на рис.3б-3г соответствуют аналогичным точкам в областях  $S(\mathbf{p})$  на рис.1б-1г.

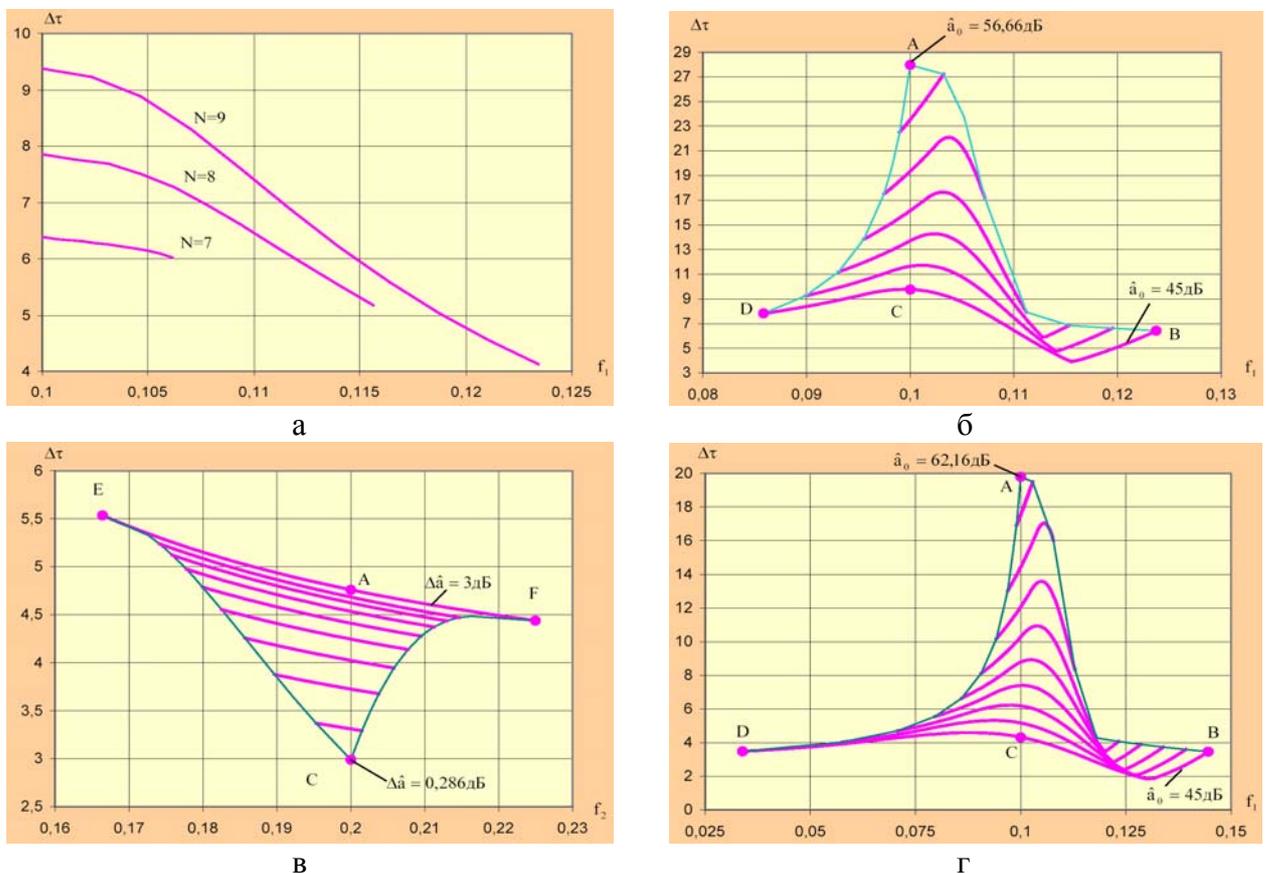


Рис.3. Зависимости неравномерности ХГВЗ от исходной граничной частоты  $f_1$  или  $f_2$  для фильтров а) Баттерворта при  $N=7,8$  и  $9$ , б) Чебышева I при  $N=5$ ,  $\hat{a}_0=45; 47; \dots; 55$  и  $56,66$  дБ, в) Чебышева II при  $N=5$ ,  $\Delta\hat{a}=0,286; 0,4; 0,6; \dots; 1,8$  и  $3$  дБ, г) Золотарёва-Кауэра при  $N=4$ ,  $f_2=0,2$ ,  $\hat{a}_0=45; 47; \dots; 61$  и  $62,16$  дБ

Для фильтров Баттерворта семейство зависимостей  $\Delta\tau$  от исходной частоты  $f_1$  показано на рис.3а. Семейство построено для частот  $f_1$  области  $S(f_1)$  на рис.1а при трех значениях  $N$ , включая минимальное  $N=7$ . Как видим, минимум  $\Delta\tau$  для каждого  $N$  соответствует максимальной частоте  $f_1$  или точке В в области  $S(f_1)$  на рис.1а. При  $N=7$  минимум  $\Delta\tau=6$ .

Для фильтров Чебышева I семейство зависимостей  $\Delta\tau$  от  $f_1$  на рис.3б построено для ряда кривых  $\hat{a}_0 = \text{const}$  в области  $S(\Delta a, f_1)$  на рис.1б при минимальном  $N=5$ . Минимум  $\Delta\tau=3,9$  находится на кривой BD. Для фильтров Чебышева II семейство зависимостей  $\Delta\tau$  от  $f_2$  на рис.3в построено для ряда кривых  $\Delta\hat{a} = \text{const}$  в области  $S(a_0, f_2)$  на рис.1в при  $N=5$ . Минимум  $\Delta\tau=3$  находится в точке С. Для фильтров Золотарева-Кауэра семейство зависимостей  $\Delta\tau$  от  $f_1$  на рис.3г построено для ряда кривых  $\hat{a}_0 = \text{const}$  в области  $S(\Delta a, f_1, f_2)$  на рис.1г при  $f_2 = f_{2n}$  и минимальном  $N=4$ . Минимум  $\Delta\tau=1,8$  находится на кривой BD.

Согласно рис.3 разброс по  $\Delta\tau$  для фильтров Золотарёва-Кауэра и Чебышева I достигает примерно 10 раз, для фильтров Чебышева II – примерно двух раз, а для фильтров Баттерворта при  $N=7$  он очень мал. На самом деле для фильтров Золотарёва-Кауэра разброс, но лишь в сторону увеличения  $\Delta\tau$ , больше указанного, поскольку семейство кривых на рис.3г, построенное при  $f_2 = f_{2n}$ , не охватывает всю область  $S(\Delta a, f_1, f_2)$  на рис.1г.

Для всех фильтров в табл.2 приведены минимальные значения  $\Delta\tau$ , найденные при разных  $N$ . Кроме того, здесь даны исходные параметры, по которым получены эти результаты.

Таблица 2. Минимальные значения  $\Delta\tau$  для классических фильтров

Фильтр	N	Исходные параметры		$\Delta\tau$
		$\Delta a$ , дБ	$f_1$	
Баттерворта	7	-	0,10617	6,0
	8		0,11562	5,2
	9		0,12343	4,1
Чебышева I	5	1,492	0,11565	3,9
	6	0,249	0,1201	3,6
	7	0,842	0,1448	2,3
	8	0,12	0,144	2,5
	9	0,039	0,148	2,5
Золотарёва-Кауэра ( $f_2 = f_{2n} = 0,2$ )	4	1,147	0,13075	1,8
	5	2,384	0,17025	1,5
	6	0,243	0,1712	1,2
	7	1,72	0,1918	0,9
	8	0,077	0,188	1,1
	9	1,596	0,19793	0,8
Фильтр Чебышева II	N	Исходные параметры		$\Delta\tau$
		$a_0$ , дБ	$f_2$	
	5	45	0,2	3,0
	6			1,9
	7			1,5
	8			1,3
	9			1,3

На рис.4 показаны зависимости  $\Delta\tau$  от  $N$  построенные по данным табл.2. Как видим, дополнительное уменьшение  $\Delta\tau$  (более чем в 2 раза) может быть получено для фильтров большего порядка. Однако увеличение  $N$  более чем в 2 раза малоэффективно. Фильтры

Золотарёва-Кауэра имеют наименьшие, а фильтры Баттерворта - наибольшие значения  $\Delta\tau$ . Фильтры Чебышева занимают промежуточные положения.

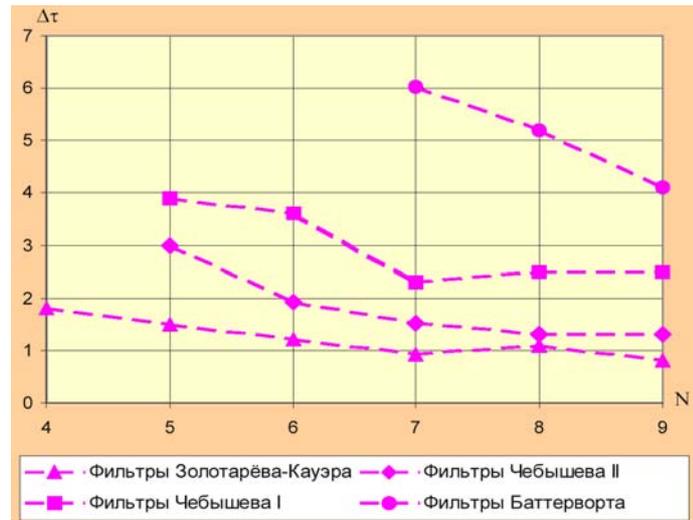


Рис.4. Зависимости минимальной неравномерности ХГВЗ классических фильтров от порядка

### Неклассические минимально-фазовые БИХ-фильтры с минимальной неравномерностью ХГВЗ

Надлежащий выбор исходных параметров АЧХ и порядка позволяет получить классические фильтры с минимальной неравномерностью ХГВЗ в номинальной полосе пропускания. Однако такой подход может не дать ожидаемых результатов, поскольку обсуждаемые фильтры, когда-то предложенные для получения желаемых АЧХ, не обязательно обладают наименьшей неравномерностью ХГВЗ. Поэтому можно попытаться улучшить классические решения, сохраняя свойство минимальной фазы. Далее сформулируем задачу синтеза неклассических минимально-фазовых каскадных БИХ-фильтров с минимальной неравномерностью ХГВЗ, определим начальные приближения, представим возможные методы условной и безусловной оптимизации для решения этой задачи, приведем примеры синтеза фильтров и покажем, что результаты, полученные для классических БИХ-фильтров, могут быть значительно улучшены.

#### Постановка задачи синтеза фильтров

Передаточную функцию каскадного БИХ-фильтра нижних частот N-ого порядка запишем в виде

$$H(z) = \prod_{i=1}^K \frac{1 + B_{1i}z^{-1} + B_{2i}z^{-2}}{1 + A_{1i}z^{-1} + A_{2i}z^{-2}}, \quad (4)$$

где  $K=N/2$  и  $K=(N+1)/2$ , соответственно для четных и нечетных  $N$ , коэффициенты  $A_{2m} = B_{2im} = 0$  для некоторого  $m \leq K$  и нечетного  $N$ .

Задачу минимизации неравномерности ХГВЗ в номинальной полосе пропускания для БИХ-фильтров с передаточной функцией (4) сформулируем как

$$\begin{aligned}
\Delta\tau(\mathbf{A}) &= \tau_{\max}(\mathbf{A}) - \tau_{\min}(\mathbf{A}) \rightarrow \min, \\
\Delta\hat{a}(\mathbf{C}) &\leq \Delta a_{\max}, \quad \hat{a}_0(\mathbf{C}) \geq a_{0\min}, \\
a_t(\mathbf{C}) &\geq a_{t\min}, \\
\mathbf{A} &\in U, \quad \mathbf{B} \in R,
\end{aligned}
\tag{5}$$

где  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  - векторы искоемых коэффициентов знаменателей и числителей в (4), вектор  $\mathbf{C}$  включает  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ ,  $a_t$  - минимальное ослабление АЧХ в переходной полосе и его допустимое значение  $a_{t\min}$ , выраженные в децибелах,  $U$  - область устойчивости,  $R$  - область соответствующая единичной окружности.

В отличие от (2)  $\Delta\tau$ ,  $\tau_{\max}$ ,  $\tau_{\min}$ ,  $\Delta\hat{a}$  и  $\hat{a}_0$  в (5) представлены как функции вектора  $\mathbf{A}$  или  $\mathbf{C}$ . Требование к вектору  $\mathbf{B}$  обеспечивает расположение нулей  $H(z)$  на единичной окружности и постоянство ХГВЗ (линейность ФЧХ) для фильтра с передаточной функцией в виде числителя (4).

Обычно при синтезе частотных фильтров к АЧХ в переходной полосе не предъявляется никаких требований. Это относится и к рассмотренным выше классическим фильтрам, для которых всплеск АЧХ в переходной полосе не превышает 0дБ, или иначе ослабление АЧХ  $a_t \geq 0$  дБ. Однако при минимизации неравномерности ХГВЗ или нелинейности ФЧХ всплеск АЧХ в переходной полосе может оказаться неприемлемым и поэтому его желательно ограничить [3,9], что и сделано в (5). Возможно еще более жесткое условие, а именно АЧХ в переходной полосе с увеличением частоты монотонно убывает. Это условие приводит к некоторому ухудшению результатов в сравнении с простым ограничением всплеска [9].

Формулировка задачи синтеза (5) с функциями ограничения, выраженными в децибелах, обусловлена удобством изложения данной статьи. На практике целесообразно представить эти функции в относительных единицах.

### *Начальные приближения*

При решении поставленной задачи в качестве начального приближения удобно взять тот или иной классический БИХ-фильтр, поскольку все ограничения в (5) для такого исходного фильтра оказываются выполненными.

В общем случае, требование в (5) к вектору  $\mathbf{B}$  означает, что коэффициенты числителей  $H(z)$  в (4) для фильтров нижних частот должны удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned}
|B_{1i}| \leq 2, \quad B_{2i} = 1 \quad \forall i = 1 \dots K \text{ при четном } N \text{ и } \forall i \neq m \text{ при нечетном } N; \\
B_{1m} = 1, \quad B_{2im} = 0 \quad \text{при нечетном } N.
\end{aligned}
\tag{6}$$

В частном случае имеет место строгое равенство в (6) и тогда в (5) неизвестен только вектор  $\mathbf{A}$ , поскольку вектор  $\mathbf{B}$  будет содержать лишь известные целочисленные компоненты. Общему случаю отвечают фильтры Чебышева II и Золотарёва-Кауэра, а частному - фильтры Баттерворта и Чебышева I.

Целесообразно при решении задачи (5) в качестве исходного выбрать фильтр Золотарёва-Кауэра или Чебышева I. Далее используем целый ряд исходных фильтров Золотарёва-Кауэра рассчитанных для точек области  $S(\Delta a, f_1, f_2)$  на рис.1г, 1д или 1е, располагающихся на кривых  $\hat{a}_0 = \text{const}$  в некоторой  $\Delta$ -окрестности кривой BD при  $a_{0\min} \leq \hat{a}_0 \leq a_{0\min} + \Delta$  и  $f_2 = f_{2n}$  [5]. Точку на той или иной кривой  $\hat{a}_0 = \text{const}$  будем характеризовать параметрами  $f_1, \hat{a}_0$ . Напомним, что на кривой BD, для которой  $\hat{a}_0 = a_{0\min}$ ,

находится оптимальная точка, соответствующая минимуму  $\Delta\tau$  для фильтров Золотарёва-Кауэра.

### **Методы решения задачи**

Задачу (5) можно решить теми или иными методами нелинейного программирования. Применим для сравнения два известных метода безусловной и условной оптимизации (см. например [10,11] и ссылки в этих работах), а именно метод градиента (МГ) и метод градиента с возвратом (МГВ).

В МГВ, как и в МГ, поиск в области допуска ведется в направлении  $-\text{grad } \Delta\tau$  с постоянным шагом [10]. Для задачи (5) с тремя ограничениями на параметры АЧХ возможны семь ситуаций, когда в методе МГВ требуется возврат в область допуска. Эти три ограничения можно привести к виду  $g_i \leq 0$ ,  $i=1,2,3$ , а возникающие ситуации описать функциями  $G_m$ ,  $m=1,2,\dots,7$ . Так  $G_m = g_m$ ,  $m=1, 2$  или  $3$  при нарушении одного из трех ограничений,  $G_4 = g_1 + g_2$ ,  $G_5 = g_1 + g_3$  или  $G_6 = g_2 + g_3$  - при нарушении двух из трех ограничений и  $G_7 = g_1 + g_2 + g_3$  при нарушении всех трех ограничений. После возникновения  $m$ -ой ситуации производится пошаговое перемещение в направлении  $-\text{grad } G_m$  для возврата в зону допуска.

Результаты решения задачи (5) с помощью обсуждаемых методов оптимизации можно улучшить благодаря следующим приемам:

- поиск на большем числе наборов параметров  $f_1, \hat{a}_0$ ,
- подбор начального шага поиска,
- поиск на большем числе наборов параметров  $f_1, \hat{a}_0$  в окрестности найденного оптимума,
- неоднократный повтор поиска с уменьшенным шагом в окрестности найденного оптимума.

Для оценки необходимых градиентов используем аналитические выражения. Текущие оценки параметров АЧХ и ХГВЗ выполним по 100 частотным точкам в каждой из полос, окончательные оценки для найденного решения уточним по 500 точкам.

### **Численные результаты**

Представим два примера решения задачи (5), которые были рассмотрены в [5]. Первый пример с требованиями к АЧХ (3), а второй – с требованиями к АЧХ из [12], которые использовались многими авторами. Первый пример проиллюстрируем и обсудим более подробно, что позволит понять детали связанные с решением задачи (5) методами условной и безусловной оптимизации.

**Пример 1.** Как было отмечено выше требованиям (3) удовлетворяет фильтр Золотарёва-Кауэра с  $N \geq 4$ . Вначале уделим внимание безусловной оптимизации на основе МГ, а затем условной - на основе МГВ. В обоих случаях ограничимся исходными фильтрами Золотарёва-Кауэра рассчитанными для  $N=5$ ,  $f_1=0,08, 0,1, 0,12$ ,  $\hat{a}_0=45, 50, 55$  дБ и  $f_2 = f_{2n}=0,2$ . Таким образом, количество исходных точек  $f_1, \hat{a}_0$  равно девяти.

Интересно посмотреть на процессы изменения параметров  $\Delta\tau$ ,  $\Delta\hat{a}$ ,  $\hat{a}_0$  и  $a_1$  синтезируемого фильтра от числа итераций в каждом из методов. Для уменьшения числа графиче-

ков вместо контролируемых параметров  $\Delta\hat{a}$  и  $\hat{a}_0$  используем максимальную взвешенную ошибку АЧХ, связанную с этими параметрами как

$$e = \max\left[\frac{(1 - 10^{-0,05\Delta\hat{a}})}{(1 - 10^{-0,05\Delta a_{\max}})}, 10^{-0,05(\hat{a}_0 - a_{0\min})}\right].$$

В этом случае двум ограничениям на  $\Delta\hat{a}$  и  $\hat{a}_0$  в (5) соответствует одно условие  $e \leq 1$ .

**Безусловная оптимизация.** На рис.5 представлены зависимости параметров  $\Delta\tau$ ,  $e$  и  $a_t$  синтезируемого фильтра от числа итераций в МГ для трех из девяти заданных

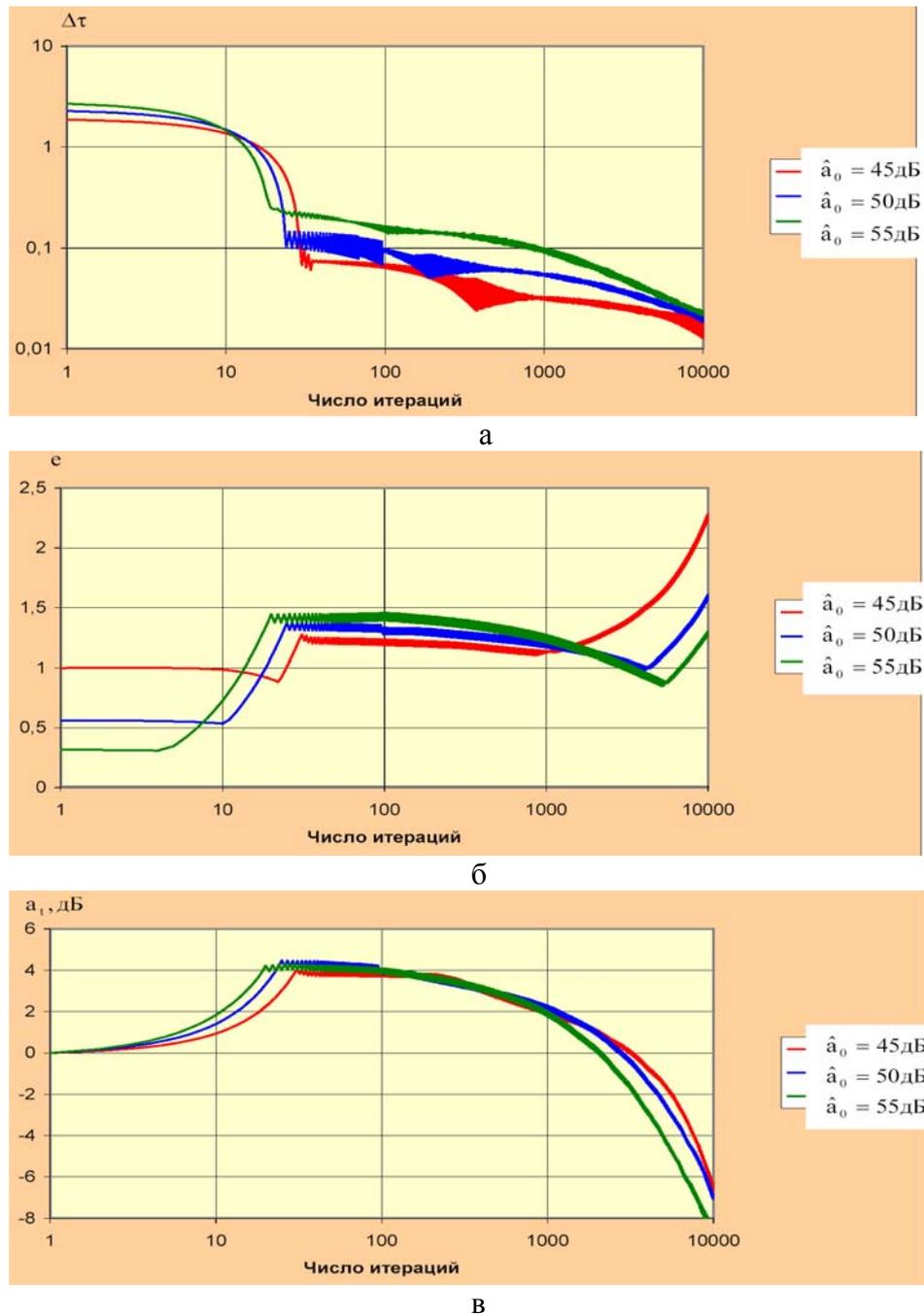


Рис.5 . Зависимости параметров синтезируемого фильтра от числа итераций в МГ для трех значений  $\hat{a}_0$  исходного фильтров Золотарева-Кауэра с  $N=5$ ,  $f_1=0,12$  и  $f_2=0,2$ : а) неравномерность  $\Delta\tau$ , б) ошибка  $e$  и в) ослабление  $a_t$

исходных точек с  $f_1 = 0,12$ ,  $\hat{a}_0 = 45, 50, 55$ дБ. Согласно рис.5а с увеличением числа итераций значение  $\Delta\tau$  существенно уменьшается. Характер трех кривых зависит от значения  $\hat{a}_0$ . Замечено, что все три процесса минимизации  $\Delta\tau$  прерываются нарушением условий устойчивости, не доходя до  $3 \cdot 10^4$  итераций, причем это обусловлено перемещением доминирующей (ближайшей к единичной окружности) пары комплексно-сопряженных полюсов фильтра за пределы единичной окружности.

Для каждого  $\hat{a}_0$  примерно одно и тоже устойчивое решение с очень малым значением  $\Delta\tau \approx 0,003$  можно получить при числе итераций более  $10^4$ . Однако это решение становится бесполезным, если обратиться к зависимостям на рис.5б. Еще до  $10^4$  итераций значение ошибки  $\epsilon$  начинает возрастать и становится больше единицы, что по условию решаемой задачи неприемлемо. Тем не менее, на рис.5б можно выделить интервалы, в которых  $\epsilon \leq 1$ . Один находится в ближней зоне (до 100 итераций) для всех трех кривых, а другой - в дальней зоне (от  $10^3$  до  $10^4$  итераций) и лишь для двух кривых.

На рис.5в показаны зависимости ослабления в переходной полосе  $a_t$  от числа итераций. Выбор решения с  $\epsilon \leq 1$  на рис.5б из ближней или дальней зоны зависит от значения  $a_{tmin}$  в (5), которое до сих пор не было задано. Если  $a_t \geq a_{tmin} = 0$ дБ, то решение с  $\epsilon \leq 1$  и минимальной  $\Delta\tau$  можно найти лишь в ближней зоне.

Результаты безусловной оптимизации для всех девяти исходных точек  $f_1, \hat{a}_0$  представлены в табл.3, где также указано число потребовавшихся итераций. Для некоторых значений  $\hat{a}_0$  даны два решения - в ближней и дальней зоне (вторая строка цифр). Решение в дальней зоне определяется, исходя из того, чтобы получить как можно большее значение  $a_t$ . Поэтому процесс оптимизации должен быть прерван при появлении первого допустимого решения с  $\epsilon \leq 1$ , что обусловлено поведением кривых на рис.5в.

Данные табл.3 дают представление о влиянии выбора исходных параметров на результаты оптимизации. Как видим, для лучших решений в ближней и дальней зоне  $\Delta\tau = 0,485$  и  $\Delta\tau = 0,036$ , соответственно. Благодаря приемам, описанным выше, эти значения были дополнительно уменьшены до  $\Delta\tau = 0,212$ дБ и  $\Delta\tau = 0,009$ . Для сравнения, в [5] в ближней зоне получено  $\Delta\tau = 0,315$ .

Таблица 3. Результаты безусловной оптимизации

Исходные параметры		Параметры синтезированных фильтров			Число итераций
$f_1$	$\hat{a}_0$ , дБ	$\Delta\tau$	$\epsilon$	$a_t$ , дБ	
0,08	45	0,598	0,969	2,86	28
	50	1,09	0,982	2,94	23
	55	2,23 0,049	0,970 1	2,89 -1,05	18 1005
0,1	45	0,529	0,960	2,86	26
	50	0,848 0,037	0,986 1	2,95 -0,695	21 1577
	55	1,40 0,057	0,971 1	2,88 - 1,32	17 1577
0,12	45	0,485	0,964	2,87	24
	50	0,725 0,036	0,972 1	2,90 -0,839	18 3478
	55	1,03 0,053	0,949 1	2,50 -1,39	13 2899

**Условная оптимизация.** В данном случае положим  $a_{t\min}=0$ дБ. На рис.6 представлены зависимости параметров  $\Delta\tau$ ,  $\epsilon$  и  $a_t$  синтезируемого фильтра от числа итераций в МГ и МГВ для исходной точки с  $f_1=0,08$ ,  $\hat{a}_0=55$ дБ. Для этой точки (из девяти ранее упомянутых) МГВ дает наилучший результат. Графики на рис.6 наглядно иллюстрируют, как видоизменяются зависимости  $\Delta\tau$ ,  $\epsilon$  и  $a_t$  от числа итераций в случае применения МГВ вместо МГ.

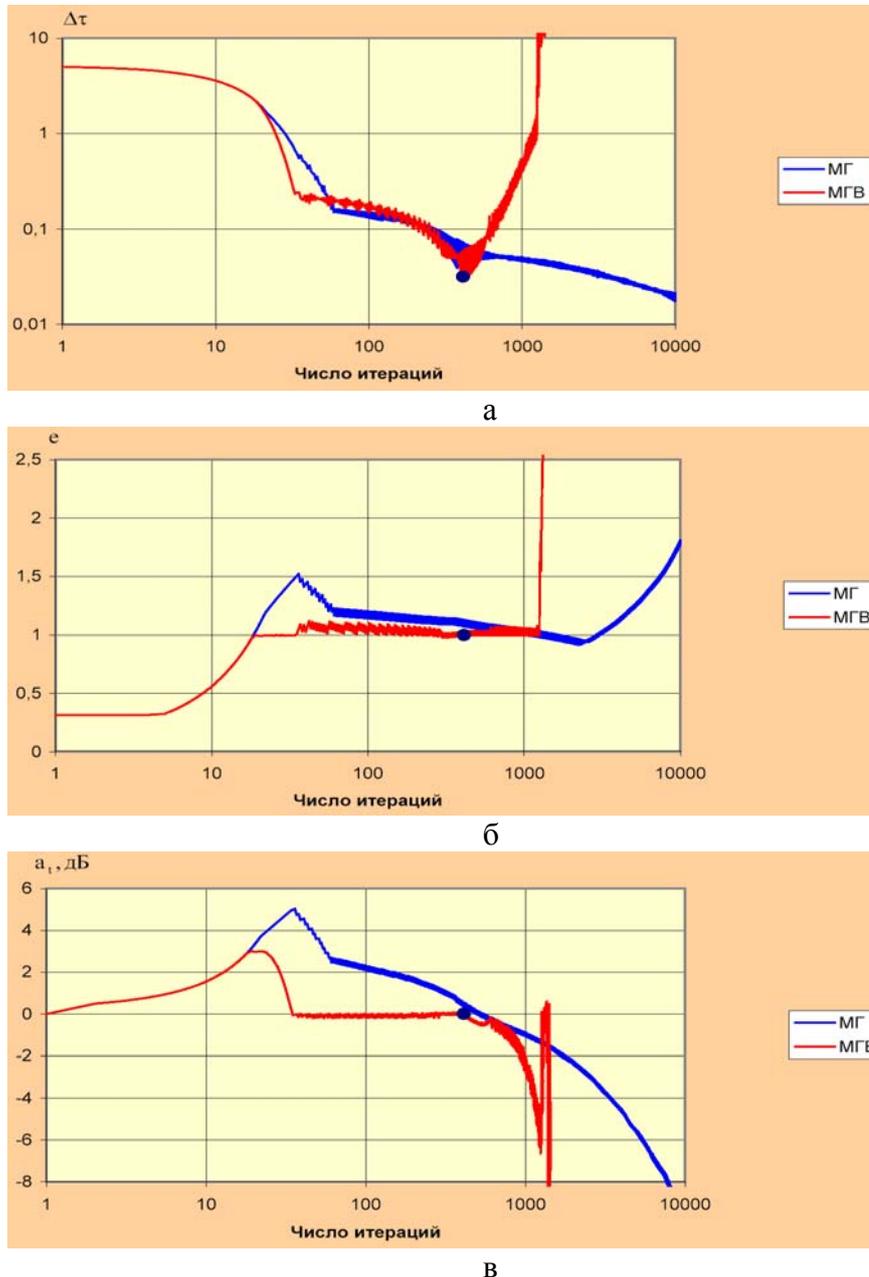


Рис.6 . Зависимости параметров синтезируемого фильтра от числа итераций в МГ и МГВ для исходного фильтра Золотарева-Кауэра с  $N=5$ ,  $\hat{a}_0=55$  дБ,  $f_1=0,08$  и  $f_2=0,2$ : а) неравномерность  $\Delta\tau$ , б) ошибка  $\epsilon$  и в) ослабление  $a_t$

На рис.6а кривая  $\Delta\tau$  для МГВ после достижения минимума резко возрастает. На рис.6б и 6в наблюдается движение вдоль границ с  $\epsilon=1$  и  $a_t=0$ дБ и резкое нарушение этих границ после  $10^3$  итераций с последующим нарушением условия устойчивости. Заметим,

что резкие колебания кривой для МГВ на рис.6в после  $10^3$  итераций обусловлены недостаточным числом точек для оценки  $a_t$ . Однако, нет смысла увеличивать это число, поскольку процесс поиска должен быть прерван из-за резкого возрастания  $\Delta\tau$  еще до появления этого эффекта. Метки на кривых для МГВ на рис.6 обозначают решение задачи (5) с  $\Delta\tau=0,032$ ,  $e=1$  и  $a_t=0,01$  дБ. Благодаря приемам, описанным выше можно получить фильтр с  $\Delta\tau=0,022$ ,  $e=1$  и  $a_t=0$  дБ. При этом исходный фильтр, рассчитанный для точки  $f_1=0,083$ ,  $\hat{a}_0=54$ дБ, имеет  $\Delta\tau=4,6$ .

Карты полюсов/нулей исходного и оптимизированного фильтров показаны на рис.7а, 7б. Как видим, для этих фильтров сильно отличаются лишь позиции доминирующих полюсов. Для сравнения на рис.7в приведена карта полюсов/нулей для фильтра Золотарёва-Кауэра с минимальной неравномерностью ХГВЗ. Хотя для этого фильтра согласно табл.2  $\Delta\tau=1,5$  при  $N=5$ , использование его в качестве исходного дает результат гораздо хуже полученного.

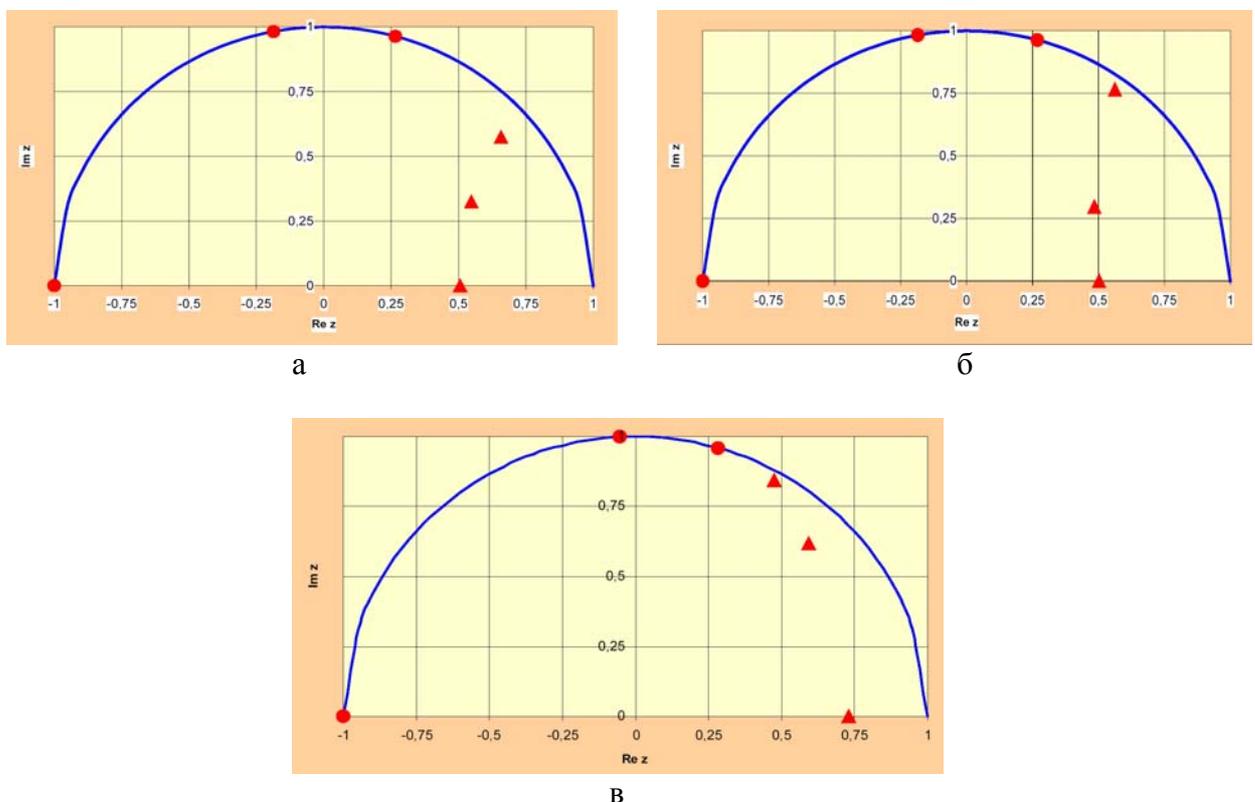


Рис.7. Карты полюсов/нулей а) исходного фильтра Золотарева-Кауэра ( $\Delta\tau=4,5$ ), в) синтезированного с помощью МГВ фильтра ( $\Delta\tau=0,022$ ) и в) фильтра Золотарева Кауэра с минимальной неравномерностью ХГВЗ ( $\Delta\tau=1,5$ )

**Сравнение результатов.** Параметры синтезированных с помощью МГ и МГВ неклассических фильтров сведены в табл.4. Там же для сравнения даны параметры фильтра Золотарёва-Кауэра с минимальной неравномерностью ХГВЗ взятые из табл.2 при  $N=5$ . Как видим, для неклассических фильтров можно получить значительно меньшие значения  $\Delta\tau$ , чем для фильтра Золотарева-Кауэра, а именно в 68 раз при  $a_t \geq 0$  дБ и в 167 раз при  $a_t = -0,869$  дБ. Найденные фильтры являются минимально-фазовыми и согласно табл.4 их максимальные значения ХГВЗ в номинальной полосе пропускания не превышают значения для фильтра Золотарёва-Кауэра. В случае, когда всплеск АЧХ в переходной полосе недо-

пустим ( $a_t \geq 0$  дБ) применение МГВ позволяет для данного примера более, чем на порядок уменьшить значение  $\Delta\tau$ , полученное с помощью МГ.

Таблица 4. Параметры синтезированных фильтров

Минимально-фазовые фильтры (N=5)						
Золотарёва-Кауэра			Неклассические			
$\Delta\tau$	$\tau_{\max}$	$a_t$ , дБ	$\Delta\tau$	$\tau_{\max}$	$a_t$ , дБ	Метод
1,5	3,78	0	0,212	3,73	1,38	МГ
			0,009	3,47	-0,80	
			0,022	3,58	0	МГВ

В табл.5 приведены значения  $\Delta\tau$  и коэффициентов, на рис.8а и 8б - АЧХ, а на рис.8в - ХГВЗ всех синтезированных фильтров. В номинальной полосе задерживания ( $0,2 \leq f \leq 0,5$ ) на рис.8а и в номинальной полосе пропускания ( $0 \leq f \leq 0,1$ ) на рис.8б АЧХ всех фильтров удовлетворяют заданным требованиям. В номинальной полосе пропускания АЧХ трех неклассических фильтров практически совпадают. Наибольшие различия проявляются в переходной полосе по уровням всплесков, которые соответствуют значениям  $a_t$  в табл. 4.

Таблица 5. Значения  $\Delta\tau$  и коэффициентов синтезированных фильтров

$\Delta\tau$	i	$A_{1i}$	$A_{2i}$	$B_{1i}$	$B_{2i}$
1,5	1	-0,95286628	0,93792855	-0,56547128	1
	2	-1,18877729	0,73368931	0,10728159	1
	3	-0,73139252	0	1	0
0,212	1	-1,08353967	0,89569467	-0,54173064	1
	2	-1,00498407	0,36836692	0,30157007	1
	3	-0,53517859	0	1	0
0,009	1	-1,10773610	0,91457912	-0,54386197	1
	2	-0,94693713	0,32414053	0,28519270	1
	3	-0,51708961	0	1	0
0,022	1	-1,12518232	0,90122197	-0,53730226	1
	2	-0,96972502	0,32266890	0,36947927	1
	3	-0,50218650	0	1	0

Согласно представленным результатам уменьшение неравномерности ХГВЗ в номинальной полосе пропускания для всех полученных минимально-фазовых БИХ-фильтров приводит фактически к расширению полосы пропускания. Дополнительное уменьшение этой неравномерности для неклассических фильтров можно достичь, увеличивая всплеск АЧХ в переходной полосе. Интересно, что подобные факты наблюдаются и для неминимально-фазовых БИХ-фильтров [3].

**Пример 2.** Требования к АЧХ [12]:  $\Delta a_{\max} = 0,5$  дБ,  $a_{0\min} = 32$  дБ,  $a_t = 0$  дБ,  $f_{1n} = 0,25$  и  $f_{2n} = 0,3$ . Этим требованиям удовлетворяет фильтр Золотарёва-Кауэра с  $N \geq 4$ . В данном случае уменьшить минимальные неравномерности ХГВЗ фильтров Золотарёва-Кауэра для  $N=4, 5, \dots, 12$  с помощью МГ, также как и в [5], не удастся. Применение МГВ не приводит к существенным результатам. Так, например при  $N=5$  для фильтра Золотарёва-Кауэра с минимальной неравномерностью ХГВЗ, соответствующего точке В на рис.1г, значение  $\Delta\tau = 3,85$ , а для фильтра найденного с помощью МГВ -  $\Delta\tau = 3,76$ . Увеличение допустимого всплеска АЧХ до 3 дБ ( $a_t = -3$  дБ) также дает мало значимый результат с

$\Delta\tau = 3,19$ . Дальнейшее уменьшение  $\Delta\tau$  до 1,75 возможно при допущении  $a_1 = -20$  дБ. Такое несущественное уменьшение  $\Delta\tau$  при сильном снижении требования к  $a_1$  можно объяснить узкой относительной переходной полосой. Действительно в данном примере отношение переходной полосы к полосе пропускания равно 0,2, а в примере 1, для которого получены превосходные результаты, отношение равно 1.

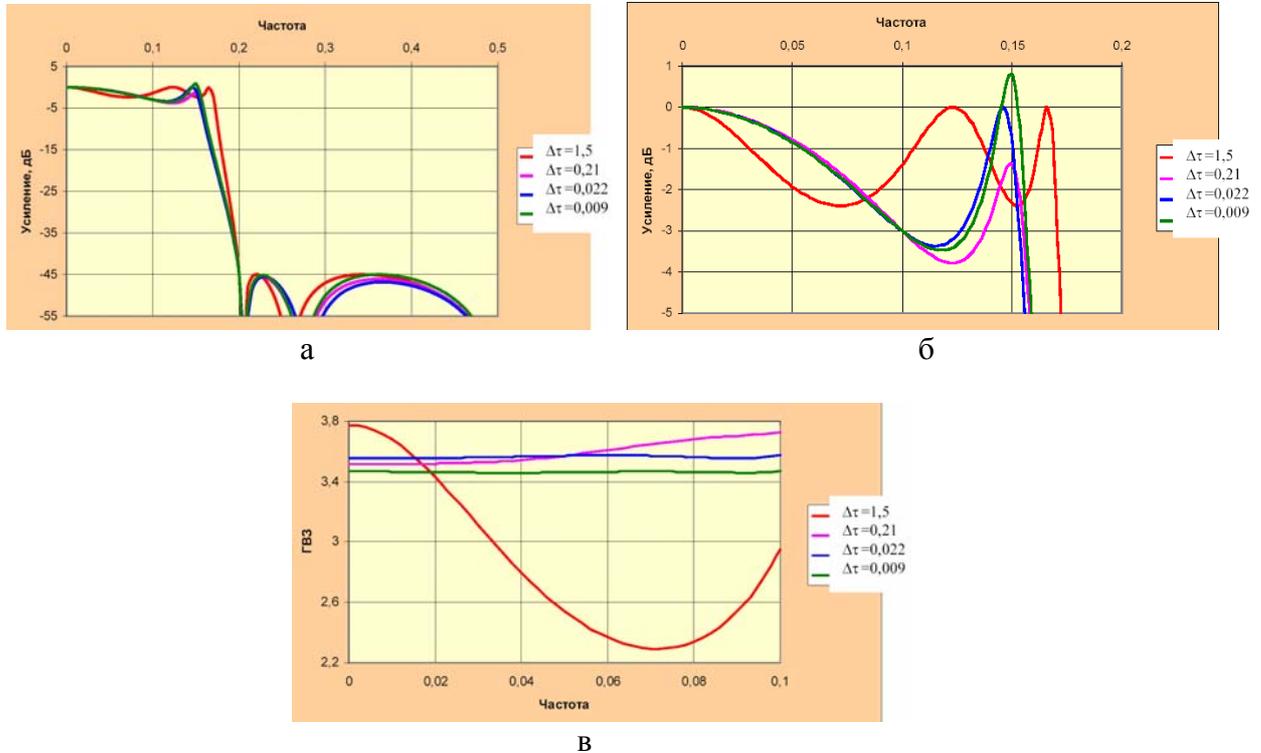


Рис.8. Частотные характеристики синтезированных БИХ-фильтров а) АЧХ в основной полосе, б) АЧХ в номинальной полосе пропускания и переходной полосе, в) ХГВЗ в номинальной полосе пропускания

Таким образом, невозможность достаточного расширения полосы пропускания в процессе оптимизации из-за узкой относительной переходной полосы требует допущения очень большого всплеска АЧХ. Однако чрезмерный всплеск АЧХ в переходной полосе может оказаться неприемлемым на практике.

Обсуждаемый пример был рассмотрен в ряде публикаций и в частности в [3], где при  $N=12$  были получены варианты решений с чрезвычайно малой неравномерностью ХГВЗ, но лишь для неминимально-фазовых фильтров.

## Заключение

Представлены два подхода к синтезу минимально-фазовых БИХ-фильтров с минимальной неравномерностью ХГВЗ в номинальной полосе пропускания и требуемой АЧХ. Хотя рассмотрены только фильтры нижних частот, синтез может быть распространен и на полосовые фильтры.

Первый подход основан на оптимальном выборе исходных параметров АЧХ классических фильтров в пределах определенной области допуска. В зависимости от требований к АЧХ и порядка фильтров разброс в значениях неравномерности ХГВЗ для точек области может быть очень большим, что оправдывает применение этого подхода. Наименьшие неравномерности ХГВЗ можно достичь для фильтров Золотарёва-Кауэра, затем в зависимо-

сти от ширины полосы пропускания для фильтров Чебышева II или Чебышева I и лишь потом для фильтров Баттерворта. Дополнительное уменьшение неравномерности ХГВЗ можно получить для большего порядка фильтров. Однако увеличение порядка более чем в два раза малоэффективно.

Второй подход основан на безусловной и условной оптимизации коэффициентов каскадного фильтра с нулями передачи на единичной окружности. При этом ряд фильтров Золотарёва-Кауэра используется в качестве исходных. Полученные таким путем неклассические минимально-фазовые фильтры могут иметь значительно меньшие неравномерности ХГВЗ (в частности в 68 и 167 раз), чем присущие фильтрам Золотарёва-Кауэра найденным с помощью первого подхода. К сожалению, результаты оптимизации сильно зависят от относительной переходной полосы и допустимого уровня всплеска АЧХ в этой полосе. Желание получить узкую переходную полосу и малый допустимый уровень всплеска может свести на нет эффект оптимизации. Для получения существенного результата в случае узкой переходной полосы требуется допущение чрезмерного всплеска АЧХ, что может оказаться неприемлемым на практике. Это ограничивает возможности минимизации неравномерности ХГВЗ минимально-фазовых БИХ-фильтров.

## Литература

1. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера. 2012. 1046 с.
2. Saramaki T., Neuvo Y. Digital filters with equiripple magnitude and group delay. IEEE Trans. 1984. ASSP-32. No. 6. P. 1194-1200.
3. Nongpiur R.C., Shpak D.J., Antoniou A. Improved design method for nearly linear-phase IIR filters using constrained optimization. IEEE Trans. on Signal Processing. 2013. V.61. No.4. P. 895-906.
4. Мингазин А. Резервы классических аппроксимаций цифровых БИХ-фильтров. Современная электроника. 2012. №9. С.62-71. (Статья с исправленными опечатками-[www.radis.ru/articles/aming22.pdf](http://www.radis.ru/articles/aming22.pdf)).
5. Мингазин А.Т. Минимально-фазовые БИХ-фильтры с минимальной неравномерностью ХГВЗ и требуемой АЧХ. //16-я Международная конференция. 'Цифровая обработка сигналов и ее применение'. (DSPA). 2014. Т.1. С.147-151.
6. Пупалайкис П.Д. Групповая задержка и ее влияние на тестирование потоков последовательных данных. Компоненты и технологии. 2007. № 1. С.150-157.
7. Мингазин А.Т. Начальные приближения для синтеза цифровых фильтров с минимальной длиной слова коэффициентов. // Электронная техника. 1983. Сер.10. № 6. Р. 3-8.
8. Мингазин А.Т. Область допустимых исходных параметров цифровых фильтров Золотарева-Кауэра//15-я Международная конференция. 'Цифровая обработка сигналов и ее применение'. (DSPA). 2013. Т.1. С.125-128.
9. Surma-aho K., Saramaki T. A systematic technique for designing approximately linear phase recursive digital filters. IEEE Trans. CAS-II. 1999. V.46, No.7. P. 956-963.
10. Карпушкин С.В. Численные методы в проектных расчетах оборудования: Электронное учебное пособие. Тамбов. 2008.
11. Пашкеев С.Д., Минязов Р.И., Могилевский И.Д. Машинные методы оптимизации в технике связи. М.: Связь. 1976. 272 с.
12. Deczky A.G. Synthesis of recursive digital filters using the minimum p-error criterion. IEEE Trans. 1972. AU-20. No. 4. P.257-263.

29 апреля 2015.

26.11.15, 18.03.16 с мелкими правками статья размещена на [www.radis.ru](http://www.radis.ru)