

Резервы классических аппроксимаций цифровых БИХ-фильтров

Александр Мингазин (Москва)

Статья посвящена проблеме выбора исходных параметров АЧХ классических цифровых БИХ-фильтров Баттерворта, Чебышева (I и II) и Золотарёва–Кауэра с целью получения минимальной неравномерности ХГВЗ и/или минимальной нелинейности ФЧХ в полосе пропускания. Рассмотрен ряд вопросов, а именно: как найти оптимальные параметры, какая аппроксимация является наилучшей, насколько хороши решения с квантованными коэффициентами, можно ли улучшить результаты, найденные ранее оригинальными методами аппроксимации, и как сильно влияет выбор исходных параметров на выравнивание ХГВЗ с помощью фазовых корректоров.

ВВЕДЕНИЕ

Для синтеза цифровых БИХ-фильтров необходимо задать требования к параметрам АЧХ, таким как предельно допустимая неравномерность в полосе пропускания, предельно допустимое минимальное ослабление в полосе задерживания и номинальные граничные частоты этих полос. Соответствующий порядок передаточной функции обычно выбирают так, что требования удовлетворяются с запасом. При этом для той или иной аппроксимации АЧХ существует определённая область допустимых исходных параметров $S(\mathbf{p})$, где \mathbf{p} – вектор исходных параметров [1]. Расчёт фильтра для любой точки области будет приводить к допустимой АЧХ. Размерность \mathbf{p} и форма $S(\mathbf{p})$ зависят от вида аппроксимации (Баттерворта, Чебышева и др.) и типа фильтра (нижних, верхних частот и др.), а её размеры – от заданных требований к АЧХ и порядка фильтра.

Перед разработчиком стоит задача выбора исходных параметров в $S(\mathbf{p})$ для расчёта фильтра. Работы [2–9] посвящены определению экстремально улучшенного значения одного из параметров при заданных остальных. Так, например, неравномерность в полосе пропускания может быть максимально уменьшена или полоса пропускания экстремально расширена без нарушения требований к другим параметрам. Такой подход означает, что совокупность исходных значений параметров будет принадлежать границе $S(\mathbf{p})$.

В работе [8] представлена компьютерная программа Extremal для расчёта экстремальных параметров АЧХ

аналоговых и цифровых фильтров нижних и верхних частот полосовых и режекторных фильтров применительно к классическим аппроксимациям Баттерворта, Чебышева I, Чебышева II (инверсная аппроксимация Чебышева) и Золотарёва–Кауэра (эллиптическая). Там же приведён пример расчёта для полосового фильтра. Кроме того, для двух фильтров нижних частот Золотарёва–Кауэра проиллюстрирована сильная зависимость неравномерности ХГВЗ в полосе пропускания от параметров АЧХ.

В данной статье мы исследуем резервы классических аппроксимаций цифровых БИХ-фильтров в смысле получения минимальной неравномерности ХГВЗ и/или минимальной нелинейности ФЧХ в полосе пропускания для точек, принадлежащих области $S(\mathbf{p})$. Эта проблема до сих пор недостаточно изучена. Нас будут интересовать следующие вопросы:

- как найти оптимальное решение;
- какая аппроксимация даёт наилучшие результаты;
- насколько хороши решения с квантованными коэффициентами;
- как сильно влияет выбор исходных параметров на результаты выравнивания ХГВЗ с помощью фазовых корректоров.

Далее мы ограничимся рассмотрением БИХ-фильтров нижних частот, полученных по аналоговым прототипам методом билинейного преобразования.

Области допустимых исходных параметров

На рисунке 1 представлены области допустимых исходных параметров

$S(\mathbf{p})$ для четырёх обсуждаемых аппроксимаций БИХ-фильтров нижних частот. Расчёт фильтра для любой точки той или иной области приводит к допустимой АЧХ, параметры которой удовлетворяют следующим условиям:

$$\Delta\hat{a} \leq \Delta a_{\max}, \hat{a}_0 \geq a_{0\min}, \quad (1)$$

где $\Delta\hat{a}$ – неравномерность АЧХ в номинальной полосе пропускания ($0 \leq f \leq f_{1n}$) и \hat{a}_0 – минимальное ослабление АЧХ в номинальной полосе задерживания ($f_{2n} \leq f \leq 0,5$), а Δa_{\max} и $a_{0\min}$ – заданные предельно допустимые значения неравномерности и ослабления; f_{1n} и f_{2n} – заданные номинальные граничные частоты полос, которые, как и текущая частота f , нормированы относительно частоты дискретизации. Предполагается, что параметры в (1) выражены в децибелах и максимум АЧХ нормирован к 0 дБ. Порядок фильтра N для конкретной аппроксимации оценивается по значениям f_{1n} , f_{2n} , Δa_{\max} и $a_{0\min}$.

Для фильтров Баттерворта $S(\mathbf{p}) = S(p_1) = S(\Delta a)$ или $S(p_2) = S(f_1)$ представляет собой отрезок прямой и полностью определяется одним исходным параметром – неравномерностью в полосе пропускания Δa или граничной частотой полосы пропускания f_1 . Эти параметры для фильтров Баттерворта являются зависимыми. На рисунке 1а показана $S(f_1)$ при Δa_{\max} . Область фильтров Чебышева I $S(p) = S(p_1, p_2) = S(\Delta a, f_1)$ на рисунке 1б полностью определяется двумя уже пояснёнными исходными параметрами. Область фильтров Чебышева II $S(a_0, f_2)$ на рисунке 1в полностью определяется двумя исходными параметрами – ослаблением в полосе задерживания a_0 и граничной частотой f_2 этой полосы. Отметим, что введённые выше области фильтров Баттерворта можно заметить на $S(a_0)$ или $S(f_2)$.

Область фильтров Золотарёва–Кауэра представляет собой трёхмерную фигуру $S(\Delta a, f_1, f_2)$ (см. рис. 1г) и полностью определяется уже пояснёнными выше тремя исходными параметрами. Она образована пересечениями

плоскости $\Delta a = \Delta a_{\max}$ и трёх поверхностей с характерными точками В, D, E для первой, D, E, F для второй и В, D, F для третьей поверхности. Начало координат соответствует точке А, для которой $\Delta a = \Delta a_{\max}$, $f_1 = f_{1n}$ и $f_2 = f_{2n}$. Точки А, В, С, D лежат в плоскости $f_2 = f_{2n}$, а точки С, E, F – в плоскости $f_1 = f_{1n}$. На рисунках 1б и 1в отмечены кривые, а на рисунке 1г – поверхности постоянства $\Delta \hat{a}$ и \hat{a}_0 . Для всех обсуждаемых аппроксимаций экстремальные значения Δa_{\min} , $\Delta a_{0\max}$, $\Delta \hat{a}_{\min}$, $\hat{a}_{0\max}$, $f_{1\min}$, $f_{1\max}$, $f_{2\min}$, $f_{2\max}$, указанные на рисунках 1а–1г, могут быть рассчитаны с помощью программы Extremal. Особо отметим, что знак \sim соответствия параметра номинальной полосе мы не используем в обозначениях предельно допустимых параметров в правых частях неравенств (1), поскольку всегда $\Delta \hat{a}_{\max} = \Delta a_{\max}$ и $\hat{a}_{0\min} = a_{0\min}$.

Области $S(p)$, с некоторыми изменениями в обозначениях, были ранее представлены в [1], где также даны их математические описания. Далее мы будем обозначать все рассмотренные области как S , опустив зависимость от вектора p или его компонентов.

Неравномерность ХГВЗ и нелинейность ФЧХ

Известно, что линейной ФЧХ соответствует постоянная ХГВЗ или нулевая неравномерность ХГВЗ. Однако не обязательно малая неравномерность ХГВЗ обусловлена малой нелинейностью ФЧХ и наоборот. Поэтому мы уделим внимание каждой из этих характеристик. Ниже, в определениях неравномерности ХГВЗ и нелинейности ФЧХ, зависимость их от p для простоты опустим.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Для оценки неравномерности ХГВЗ в номинальной полосе пропускания используем следующее определение:

$$\Delta\tau = \max_f \tau(f) - \min_f \tau(f), 0 \leq f \leq f_{1n}$$

где $\tau(f)$ – ХГВЗ. Значения $\tau(f)$ и $\Delta\tau$ оцениваются в отсчётах частоты дискретизации.

Для оценки нелинейности ФЧХ в номинальной полосе пропускания используем следующее определение:

$$\Delta\varphi = \max_f |(\varphi(f) - K 360 f)|, 0 \leq f \leq f_{1n} \quad (2)$$

где $\varphi(f)$ – ФЧХ, K – константа, которая подбирается так, чтобы $\Delta\varphi$ была мини-

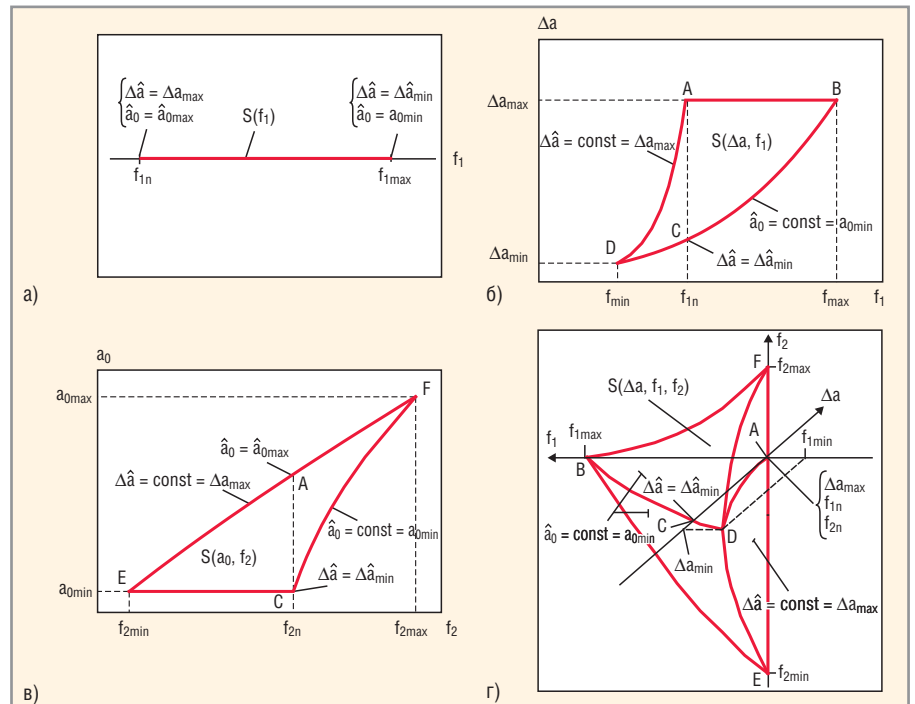


Рис. 1. Области допустимых исходных параметров фильтров

а) Баттворта, б) Чебышева I, в) Чебышева II, г) Золотарёва-Кауэра

мальной. Значения $\varphi(f)$ и $\Delta\varphi$ оцениваются в градусах.

Затруднительно найти аналитически точку в той или иной области S на рисунке 1, которая соответствует минимуму нелинейности ФЧХ и/или минимуму неравномерности ХГВЗ в полосе пропускания. Поэтому выполним прямое исследование всех областей на рисунке 1 для следующих значений параметров (1):

$$\Delta a_{\max} = 3 \text{ дБ}; a_{0\min} = 45 \text{ дБ};$$

$$f_{1n} = 0,1 \text{ и } f_{2n} = 0,2. \quad (3)$$

Далее мы будем руководствоваться известными фактами в отношении параметров АЧХ БИХ-фильтров. Так, зависимости между параметрами имеют регулярный характер, и невозможно улучшить одни параметры без ухудшения других. Кроме того, следует помнить, что уменьшение неравномерности в номинальной полосе пропускания позволяет снизить $\Delta\tau$ и $\Delta\varphi$. Эти утверждения не связаны с конкретны-

Advantex SG8 Высококачественный генератор сигналов

Мощность: $-20..+28$ дБм
 Погрешность: $\pm 0,2$ дБ
 Шаг установки: $0,05$ дБ

Диапазон частот: 10 МГц .. 8 ГГц
 Шаг перестройки: $< 0,001$ Гц
 Фазовый шум: -120 дБм/Гц
 при отстройке 10 кГц от 1 ГГц

Модуляция: частотная, фазовая
 Качания: частота, мощность
 Управление (SCPI): USB, RS-232

Сделано в России
 www.advantex.ru

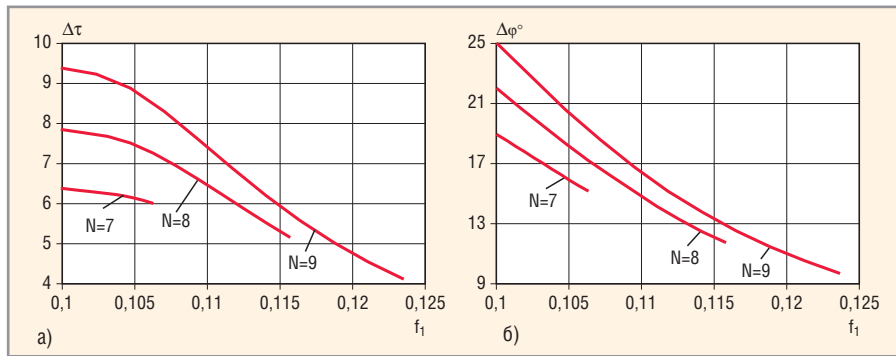


Рис. 2. Зависимости неравномерности ХГВЗ (а) и нелинейности ФЧХ (б) фильтров Баттерворта от граничной частоты f_1 при требованиях (3)

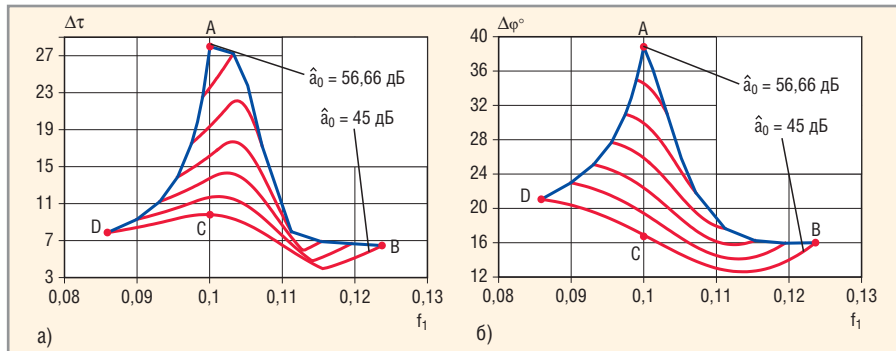


Рис. 3. Зависимости неравномерности ХГВЗ (а) и нелинейности ФЧХ (б) фильтров Чебышева I от граничной частоты f_1 при требованиях (3), $N = 5$, $\hat{a}_0 = 45; 47; \dots; 55$ и $56,66$ дБ

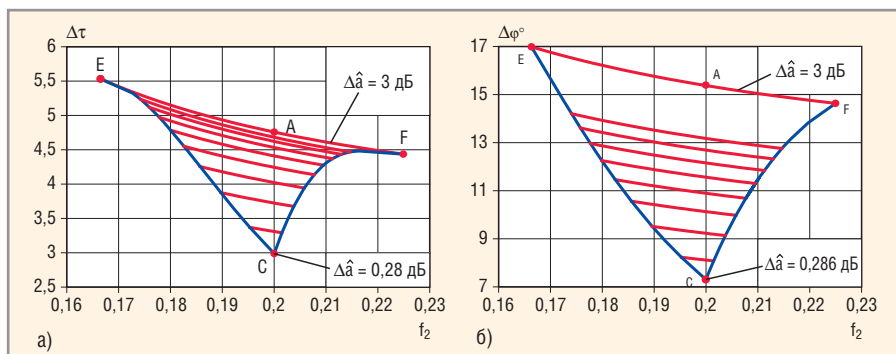


Рис. 4. Зависимости неравномерности ХГВЗ (а) и нелинейности ФЧХ (б) фильтров Чебышева II от граничной частоты f_2 при требованиях (3), $N = 5$, $\Delta\hat{a} = 0,286; 0,4; 0,6; \dots; 1,8$ и 3 дБ

ми требованиями к АЧХ. Поэтому мы полагаем, что выводы относительно той или иной аппроксимации при условиях (3) будут справедливы и в случае произвольных требований.

Фильтры Баттерворта

Для фильтров Баттерворта на рисунках 2а и 2б представлены зависимости $\Delta\tau$ и $\Delta\phi$ от исходного параметра f_1 области рисунка 1а для трёх значений N , включая минимальное $N = 7$. Видно, что с увеличением f_1 , неравномерность ХГВЗ и нелинейность ФЧХ монотонно уменьшаются, независимо от N . Заметим, что для фильтров Баттерворта увеличение f_1 эквивалентное уменьшению Δa приводит к уменьшению $\Delta\hat{a}$

Предельно возможному значению $f_1 = f_{1max}$ (или $\Delta a = \Delta a_{min}$) соответствуют

минимумы параметров $\Delta\tau$ и $\Delta\phi$. С увеличением N возрастает различие в значениях этих параметров для крайних точек S . Увеличивая N от 7 до 9 и предельно расширяя полосу пропускания f_1 , можно несколько уменьшить $\Delta\tau$ и $\Delta\phi$. Дальнейшее увеличение N малоэффективно.

Фильтры Чебышева I

Для фильтров Чебышева I зависимость $\Delta\tau$ и $\Delta\phi$ от исходных параметров Δa и f_1 исследуем на ряде кривых $\hat{a}_0 = \text{const}$ области S (см. рис. 1б). По мере увеличения \hat{a}_0 происходит уменьшение S за счёт перемещения кривой BD к точке A до полного слияния с ней. В области S наименьшие Δa и $\Delta\hat{a}$ для конкретного значения f_1 имеют место на кривой BD. Поэтому, учитывая упо-

мянутую ранее полезность уменьшения $\Delta\hat{a}$ и то, что для BD диапазон изменения f_1 является максимальным, можно предположить, что минимумы $\Delta\tau$ и $\Delta\phi$ находятся на этой кривой.

Для требований (3) минимальное значение $N = 5$. На рисунках 3а и 3б показаны зависимости $\Delta\tau$ и $\Delta\phi$ от f_1 для ряда значений \hat{a}_0 . Минимумы $\Delta\tau$ и $\Delta\phi$ имеют место при разных f_1 и лежат на кривой BD, что подтверждает сделанное выше предположение.

С увеличением \hat{a}_0 минимум $\Delta\tau$, возрастая, перемещается на правый, а затем на левый край кривой $\hat{a}_0 = \text{const}$ (см. рис. 3а), а минимум $\Delta\phi$ – на правый край кривой $\hat{a}_0 = \text{const}$ (см. рис. 3б). Видно, что не всегда уменьшение $\Delta\tau$ сопровождается уменьшением $\Delta\phi$, и наоборот. Представленные кривые на рисунках 3а и 3б имеют регулярный характер. Здесь точки A, B, C и D соответствуют аналогичным точкам области S на рисунке 1б. Полученные минимальные значения $\Delta\tau$ и $\Delta\phi$ на рисунках 3а и 3б меньше значений в точках B, C, D и значительно меньше наихудших значений в точках A.

Таким образом, минимум $\Delta\tau$ или $\Delta\phi$ фильтров Чебышева I можно найти, исследовав лишь кривую BD рисунка 1б на дискретном наборе частот f_1 . Такой однопараметрический поиск легко автоматизировать на компьютере.

Фильтры Чебышева II

Для фильтров Чебышева II зависимость $\Delta\tau$ и $\Delta\phi$ от исходных параметров a_0 и f_2 удобно исследовать на ряде кривых $\Delta\hat{a} = \text{const}$ области S рисунка 1в. С уменьшением $\Delta\hat{a}$ происходит уменьшение области S за счёт перемещения кривой EF к точке C до полного слияния с ней. Для этой точки $\Delta\hat{a} = \Delta\hat{a}_{min}$. Поэтому точка C является подозреваемой на минимум $\Delta\tau$ и $\Delta\phi$.

На рисунках 4а и 4б показаны зависимости $\Delta\tau$ и $\Delta\phi$ от f_2 для $N = 5$ и ряда значений $\Delta\hat{a}$. Минимумы $\Delta\tau$ и $\Delta\phi$ имеют место, как и предполагалось, в точке C, и с ростом $\Delta\hat{a}$ их значения увеличиваются и перемещаются на правый край кривых $\Delta\hat{a} = \text{const}$ на рисунках 4а и 4б. Здесь точки A, C, E и F соответствуют аналогичным точкам S рисунка 1в. Согласно рисункам 4а и 4б, полученный минимум $\Delta\tau$ более чем в ~1,5 раза, а минимум $\Delta\phi$ более чем в два раза меньше значений в точках A, E и F.

Таким образом, минимум $\Delta\tau$ или $\Delta\phi$ фильтров Чебышева II можно найти, выполнив расчёт для точки C области S

на рисунке 1в, что совпадает с расчётом этих фильтров непосредственно по данным (3). Здесь можно отметить, что подстановка (3) в широко известную программу QEDesign-2000 даёт решение для точки E на рисунке 1в, которой, согласно рисункам 4а и 4б, соответствует фильтр с наибольшими значениями $\Delta\tau$ и $\Delta\varphi$.

**ФИЛЬТРЫ
ЗОЛОТАРЁВА–КАУЭРА**

Фильтры Золотарёва–Кауэра полностью определяются исходными параметрами $\Delta a, f_1$ и f_2 области S (см. рис. 1г). Сечения этой области при $f_2 = \text{const}$ по форме напоминают область фильтров Чебышева I на рисунке 1б. Наибольшее из них соответствует $f_2 = f_{2n}$ и проходит через точки A, B, C и D. Поэтому предположим, что минимумы $\Delta\tau$ и $\Delta\varphi$ находятся именно в этом сечении, более того, на кривой BD, как и в случае фильтров Чебышева I. Для подтверждения этого исследуем зависимость $\Delta\tau$ и $\Delta\varphi$ от f_1 при $f_2 = f_{2n}$ на ряде кривых $\hat{a}_0 = \text{const}$ области S. Кроме того, для полноты картины мы исследуем также сечение области на рисунке 1г, которое проходит через точки C, E, F и является наибольшим из всех сечений $f_1 = f_{1n} = \text{const}$. Это сечение будет напоминать область S фильтров Чебышева II, если последнюю изобразить в координатах $\Delta a, f_2$, а не a_0, f_2 , как на рисунке 1 в.

Для требований (3) минимальное значение $N = 4$. На рисунке 5а и 5б показаны зависимости $\Delta\tau$ и $\Delta\varphi$ от f_1 для ряда значений \hat{a}_0 . Минимумы $\Delta\tau$ и $\Delta\varphi$ имеют место при разных f_1 и, как предполагалось, находятся на кривой BD. Семейства кривых на рисунках 5а и 5б очень схожи с семействами кривых на рисунках 3а и 3б для фильтров Чебышева I. Полученные минимумы $\Delta\tau$ и $\Delta\varphi$ на рисунках 5а и 5б меньше значений в экстремальных точках B, C, D и значительно меньше наихудших значений в точке A. Интересно отметить, что с уменьшением Δa_{max} в (3) минимумы $\Delta\tau$ и $\Delta\varphi$ на рисунках 5а и 5б перемещаются по кривым BD вправо и в конечном счёте оказываются в точках B.

Рассмотрим теперь сечение $f_1 = f_{1n}$ области S на рисунке 1г. Зависимости $\Delta\tau$ и $\Delta\varphi$ от f_2 для ряда значений \hat{a}_0 представлены рисунками 6а и 6б. Видно, что минимумы $\Delta\tau$ и $\Delta\varphi$ достигнуты в точках C и превышают минимумы на рисунках 5а и 5б. Семейства кривых на рисунке 6 схожи с показанными на рисунке 4 для фильтров Чебышева II.

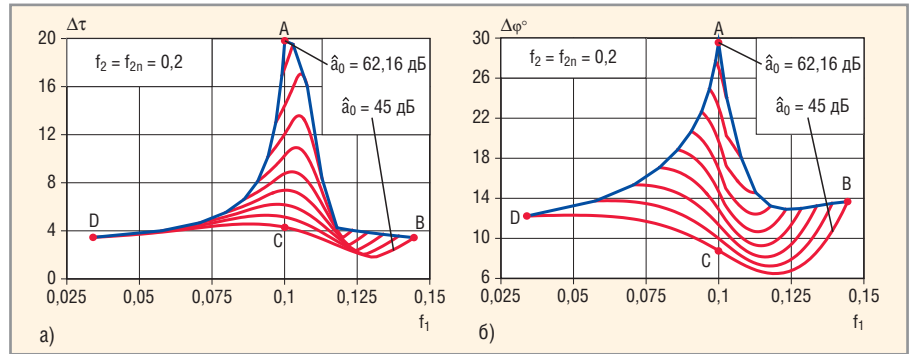


Рис. 5. Зависимости неравномерности ХГВЗ (а) и нелинейности ФЧХ (б) фильтров Золотарёва–Кауэра от граничной частоты f_1 при требованиях (3), $N = 4, f_2 = 0,2, \hat{a}_0 = 45; 47; \dots; 61$ и $62,16$ дБ

Итак, мы полагаем, что минимум или $\Delta\tau$ или $\Delta\varphi$ фильтров Золотарёва–Кауэра можно найти, исследовав кривую BD области S рисунка 1г на дискретном наборе граничных частот f_1 . Такой процесс однопараметрического поиска легко автоматизировать с помощью компьютера.

ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

Известно [10], что аналоговые фильтры Баттерворта и Чебышева (I и II) являются предельными вариантами фильтров Золотарёва–Кауэра. На рисунке 7 дана схема предельных переходов в случае цифровых фильтров, из

которой видно, что от фильтров Золотарёва–Кауэра при определённых условиях (указанных на схеме) возможен переход к трём другим фильтрам. Кроме того, от фильтров Чебышева I и II можно перейти к фильтрам Баттерворта. Такие переходы могут привести к нарушению условий (1), что устраняется увеличением N .

Допустим, что порядки фильтров Золотарёва–Кауэра и Чебышева (I и II) выбраны, исходя из условия (1), идентичными, причём области S фильтров Чебышева I и II являются точечными. Тогда, согласно схеме предельных переходов, на рисунке 1г точке F соот-

СПЕКТР

Тел.: +7 (195) 220 6490, 8 (800) 278 2841
 Факс: +7 (012) 303 2755 (зап.)
 info@spectr-pcb.ru • www.spectr-pcb.ru

МОНТАЖ ПЕЧАТНЫХ ПЛАТ

Компания СПЕКТР предлагает услуги по изготовлению и монтажу печатных плат. Предлагаем изготовление опытных образцов. Изготовление заказов любого объема.

Реклама

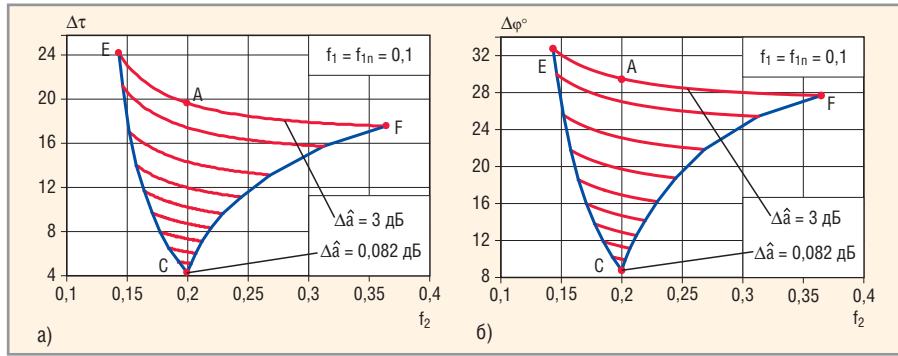


Рис. 6. Зависимости неравномерности ХГВЗ (а) и нелинейности ФЧХ (б) фильтров Золотарёва-Кауэра от граничной частоты f_2 при требованиях (3), $N = 4$, $f_1 = 0,1$, $\Delta\hat{a} = 0,082; 0,13; 0,2; 0,32; 0,5; 0,76; 1,15; 1,7; 2,46$ и 3 дБ

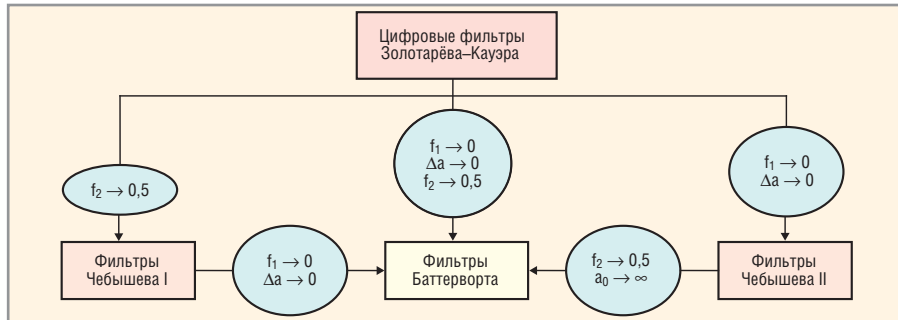


Рис. 7. Схема предельных переходов для цифровых фильтров

ветствует $f_2 = 0,5$ и единственный фильтр Чебышева I, а точке D – равенство $f_1 = \Delta a = 0$ и единственный фильтр Чебышева II.

Предположим теперь, что для всех четырёх обсуждаемых фильтров порядки идентичны и условия (1) выполняются с некоторым запасом. Тогда область S на рисунке 1г примет форму, показанную на рисунке 8, где можно видеть место трёх других фильтров. Фильтры Чебышева I располагаются в плоскости $f_2 = 0,5$ в области, которая схожа по форме с изображенной на рисунке 1б. Фильтры Баттерворта размещаются в точке $\Delta a = f_1 = 0$, а фильтры Чебышева II – на отрезке прямой, соединяющей две жирные точки на линии пересечения плоскостей $\Delta a = 0$ и

$f_1 = 0$. Если обратиться к областям фильтров Чебышева I и II рисунков 1б и 1в, то здесь также можно указать место фильтров Баттерворта. На рисунке 1б – это точка $\Delta a_{\min} = f_{1\min} = 0$, а на рисунке 1в – это отрезок, который образован пересечением границ $\Delta\hat{a} = \Delta a_{\max}$ и $\hat{a}_0 = a_{0\min}$ с прямой линией $f_2 = f_{2\max} = 0,5$.

Предельный переход от фильтров Золотарёва-Кауэра к фильтрам Чебышева II и I можно дополнительно проиллюстрировать на конкретных зависимостях $\Delta\tau$ (или $\Delta\phi$) от f_1 и $\Delta\tau$ (или $\Delta\phi$) от f_2 соответственно. Ограничимся рассмотрением кривых $\Delta\tau$ от f_1 и $\Delta\tau$ от f_2 для требований (3).

На рисунке 9 представлены зависимости $\Delta\tau$ от f_1 фильтров Золотарёва-

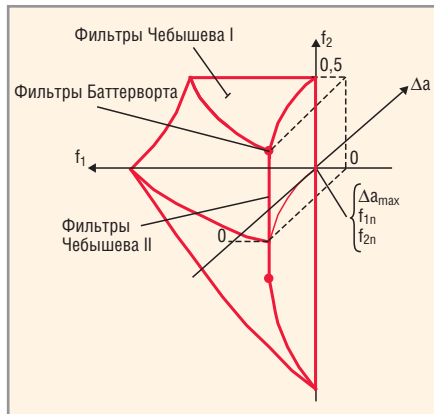


Рис. 8. Область допустимых исходных параметров фильтров Золотарёва-Кауэра

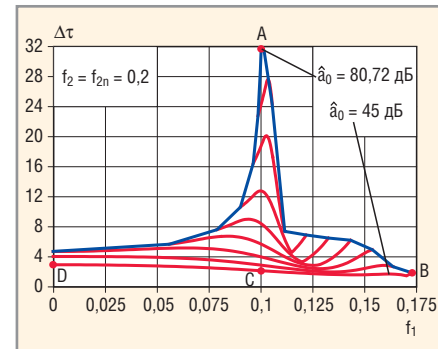


Рис. 9. Зависимости неравномерности ХГВЗ фильтров Золотарёва-Кауэра от граничной частоты f_1 при требованиях (3), $N = 5$, $f_2 = 0,2$, $\hat{a}_0 = 45; 50; \dots; 75; 78$ и $80,72$ дБ

ва-Кауэра при $N = 5$, $f_2 = f_{2n}$ для ряда значений \hat{a}_0 . Отличие этого семейства кривых от показанного на рисунке 5а заключается в том, что три нижние кривые начинаются при $f_1 = 0$. Выполнить точный расчёт фильтров Золотарёва-Кауэра для $f_1 = 0$ невозможно. Приближённый расчёт для трёх кривых можно выполнить для частоты f_1 , близкой к 0. Здесь имеет место предельный переход к фильтрам Чебышева II. Точные значения $\Delta\tau$ для трёх нижних кривых на частоте $f_1 = 0$ можно получить, рассчитав фильтры Чебышева II при $N = 5$, $f_2 = f_{2n}$, $a_0 = 45, 50$ и 55 дБ.

На рисунке 10 показаны зависимости $\Delta\tau$ от f_2 при $N = 5$, $f_1 = f_{1n}$ для ряда значений $\Delta\hat{a}$. Отличие этого семейства от показанного на рисунке 6а заключается в том, что четыре верхние кривые заканчиваются при $f_2 = 0,5$. Расчёт фильтров Золотарёва-Кауэра для $f_2 = 0,5$ даёт погрешность. Приближённый расчёт возможен для частоты f_2 , близкой к 0,5. Здесь имеет место предельный переход к фильтрам Чебышева I. Точные значения $\Delta\tau$ на частоте $f_2 = 0,5$ для четырёх верхних кривых можно получить, рассчитав фильтры Чебышева I при $N = 5$, $f_1 = f_{1n}$, $\Delta a = 0,352; 1,026; 1,852$ и 3 дБ.

СРАВНЕНИЕ ФИЛЬТРОВ

Выполним сравнение обсуждаемых классических фильтров, удовлетворяющих (1) при требованиях (3). На рисунках 11а и 11б представлены зависимости минимумов $\Delta\tau$ и $\Delta\phi$ от порядка фильтра N для четырёх рассматриваемых аппроксимаций. Видно, что в данном конкретном случае наилучшими являются фильтры Золотарёва-Кауэра, причём независимо от N . Затем следуют фильтры Чебышева II, Чебышева I и фильтр Баттерворта. В этом нет ничего удивительного, поскольку, как бы

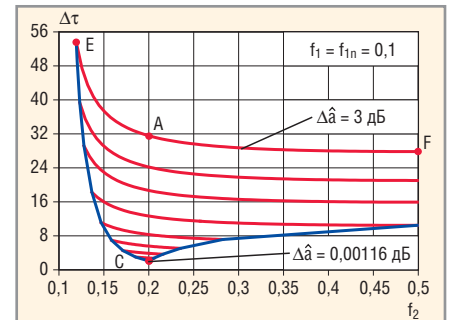


Рис. 10. Зависимости неравномерности ХГВЗ фильтров Золотарёва-Кауэра от граничной частоты f_2 при требованиях (3), $N = 5$, $f_1 = 0,1$, $\Delta\hat{a} = 0,00116; 0,0365; 0,116; 0,365; 1,14; 0,352; 1,026; 1,852$ и 3 дБ

ло отмечено выше, фильтры Чебышева и Баттерворта являются лишь специальными вариантами фильтров Золотарёва–Кауэра, были предложены давно и не с целью достижения минимальных $\Delta\tau$ и $\Delta\varphi$.

В таблицах 1–4 даны порядки фильтров N и найденные для них значения минимумов $\Delta\tau$ и $\Delta\varphi$, отображённые на рисунках 11а и 11б. Здесь же указаны максимумы ХГВЗ в номинальной полосе пропускания τ_{\max} и значения параметра K , фигурирующего в (2). Кроме того, представлены исходные параметры (f_1 или Δa и f_1 или a_0 и f_2 , в зависимости от аппроксимации), по которым получены все эти результаты. В случае фильтров Чебышева I (см. таблицу 2) и Золотарёва–Кауэра (см. таблицу 4) результаты для каждого N приведены в двух строках: первая соответствует минимуму неравномерности ХГВЗ, вторая – минимуму нелинейности ФЧХ.

Напомним, что для фильтров Баттерворта (см. таблицу 1) или Чебышева II (см. таблицу 3) значения минимумов $\Delta\tau$ и $\Delta\varphi$ достигаются при одних и тех же исходных параметрах. Если обратиться к зависимостям на рисунках 5а и 5б для фильтров Золотарёва–Кауэра, то можно увидеть, что существует диапазон значений f_1 , для которых $\Delta\tau$ и $\Delta\varphi$ оказываются меньше, чем минимальные значения, полученные для фильтров Чебышева (I и II) и Баттерворта.

Дополнительные расчёты показывают, что расположение кривых на рисунках 11а и 11б может быть нарушено. Так, для достаточно широкой номинальной полосы пропускания фильтры Чебышева I могут иметь меньшие значения $\Delta\tau$ и $\Delta\varphi$, чем фильтры Чебышева II.

НЕБОЛЬШОЕ ОТСТУПЛЕНИЕ

Представим себе, что область S фильтра Золотарёва–Кауэра соответствует точке. Понятно, что никакие другие значения коэффициентов передаточной функции этого фильтра не позволят нам улучшить параметры ФЧХ или ХГВЗ без нарушения требований к АЧХ. В этой ситуации фильтры Золотарёва–Кауэра обладают не только оптимальными АЧХ, что им свойственно, но и оптимальными ХГВЗ и ФЧХ, которые в конкретных случаях могут оказаться совершенно неприемлемыми. С некоторыми оговорками подобные рассуждения можно отнести и к трём другим обсуждаемым здесь классическим фильтрам, АЧХ которых являются в определённом смысле

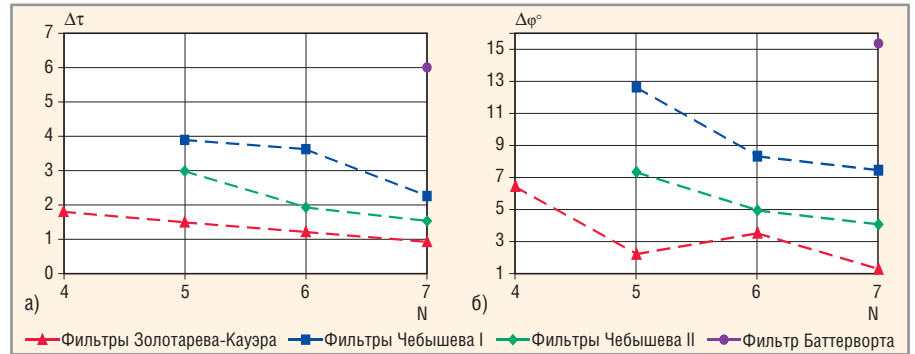


Рис. 11. Зависимости минимумов неравномерности ХГВЗ (а) и нелинейности ФЧХ (б) от порядка различных фильтров при требованиях (3)

оптимальными. Получить лучшее соотношение между параметрами рассматриваемых характеристик можно, увеличив порядок собственно фильтра и/или добавив корректор. В этой связи возникает проблема выбора порядков фильтра и корректора, а также исходных параметров. В конце статьи мы затронем задачу выравнивания ХГВЗ фильтров Золотарёва–Кауэра.

КВАНТОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Метод вариации исходных параметров (ВИП) успешно применялся для

получения допустимых АЧХ некоторых структур фильтров с квантованными коэффициентами (см., например, [11]). Суть метода заключается в нахождении такой точки в области S , для которой последующее квантование (округление) коэффициентов с шагом $q = 2^{-M}$ приводит к оптимальному решению. Здесь M – максимальная длина слова мантиссы коэффициентов. Ниже на двух примерах мы покажем, какие результаты можно достичь, решая эту задачу при дополнительном требовании к ХГВЗ, а именно при $\Delta\tau \rightarrow \min$. Ограничимся рассмотрением

Таблица 1. Параметры ХГВЗ и ФЧХ фильтра Баттерворта с требованиями (3) и соответствующая исходная f_1

N	$\Delta\tau$	τ_{\max}	$\Delta\varphi^\circ$	K	f_1
7	6,02	12,50	15,36	-7,5436	0,10617

Таблица 2. Параметры ХГВЗ и ФЧХ фильтров Чебышева I с требованиями (3) и соответствующие исходные $\Delta a, f_1$

N	$\Delta\tau$	τ_{\max}	$\Delta\varphi^\circ$	K	$\Delta a, \text{дБ}$	f_1
5	3,90	8,67	12,76	-6,2055	1,492	0,11565
	4,69	9,64	12,64	-6,2762	1,233	0,11365
6	3,63	9,34	9,04	-6,6040	0,249	0,1201
	5,02	10,06	8,33	-6,4492	1,058	0,1320
7	2,27	7,97	7,95	-6,6228	0,842	0,1448
	2,77	8,88	7,45	-6,7318	0,311	0,13775

Таблица 3. Параметры ХГВЗ и ФЧХ фильтров Чебышева II с требованиями (3) и соответствующие исходные a_0, f_2

N	$\Delta\tau$	τ_{\max}	$\Delta\varphi^\circ$	K	$a_0, \text{дБ}$	f_2
5	2,99	6,25	7,34	-3,7933	45	0,2
6	1,93	4,97	4,95	-3,4140		
7	1,53	4,44	4,07	-3,2246		

Таблица 4. Параметры ХГВЗ и ФЧХ фильтров Золотарёва–Кауэра с требованиями (3) и соответствующие исходные $\Delta a, f_1$

N	$\Delta\tau$	τ_{\max}	$\Delta\varphi^\circ$	K	$\Delta a, \text{дБ}$	f_1
4	1,80	4,45	7,73	-3,5310	1,147	0,13075
	2,69	5,71	6,45	-3,7176	0,467	0,1195
5	1,49	3,78	5,17	-3,0023	2,384	0,17025
	1,74	4,41	2,21	-3,0285	1,275	0,1641
6	1,21	3,86	3,87	-3,0147	0,243	0,1712
	1,26	4,03	3,53	-3,0680	0,066	0,1623
7	0,91	3,28	3,21	-2,8152	1,72	0,1918
	1,02	3,61	1,28	-2,8070	0,951	0,18965

каскадных фильтров Золотарёва–Кауэра на звеньях не выше второго порядка и прямой формы. При этом масштабирование в фильтрах проигнорируем. Используем трёхпараметрический алгоритм ВИП [11], с помощью которого при фиксированном значении M осуществим поиск всех решений с допустимыми АЧХ и выбор решения с минимальным значением $\Delta\tau$.

В первом примере мы удовлетворим (1) при требованиях (3) и $\Delta\tau \rightarrow \min$ для фильтра с квантованными коэффициентами. Результаты представлены в таблице 5 для $N=4$ (при $M=4$ и 5) и $N=5$ (при $M=3$). Здесь указаны полученные $\Delta\tau$ и соответствующие им исходные параметры. Видно, что квантование коэффициентов ($M \neq \infty$) не приводит к ухудшению решений с непрерывными коэффициентами ($M = \infty$). Наблюдается даже заметное уменьшение $\Delta\tau$ при $M=5$ и особенно при $M=3$. Однако для других требований решение с квантованными коэффициентами может оказаться хуже, чем с непрерывными.

Второй пример, для которого $N=4$, $M=7$, $f_{1n}=0,2$ и $f_{2n}=0,3$, возьмём из [12]. Авторы этой работы использовали сложную многокритериальную целевую функцию для получения фильтра

с квантованными коэффициентами, который должен обладать приемлемыми АЧХ и ХГВЗ. Дополнительные ограничения накладываются на максимальный полюсный радиус r . Решение задачи было найдено методом имитации процесса отжига (ИПО), приводящим к результатам, близким к глобальному оптимуму. В таблице 6 в колонке ИПО представлены параметры полученного фильтра [12]. Кроме того, там приведены параметры, соответствующие простому округлению (ПО) коэффициентов фильтра Золотарёва–Кауэра, а также найденные нами с помощью упомянутого алгоритма ВИП. Видно, что ПО уступает методу ИПО по $\Delta\tau$ и $1-r$. В то же время, алгоритм ВИП при $M=5$, а не $M=7$, как в [12], приводит к результатам, которые несколько лучше достигнутых с помощью ИПО. При $M=4$ алгоритм ВИП проигрывает методу ИПО лишь по достигнутому максимуму $1-r$. Два найденных с помощью ВИП решения можно воспроизвести, рассчитав фильтры Золотарёва–Кауэра по следующим двум наборам исходных параметров: $\Delta a = 0,2133$ дБ, $f_1 = 0,2328$, $f_2 = 0,2968$ и $\Delta a = 0,00649$ дБ, $f_1 = 0,1822$, $f_1 = 0,3006$. Далее коэффициенты фильтров округляются до $M=4$ для первого и $M=5$ для

второго набора исходных. Передаточная функция для второго варианта имеет вид:

$$H(z) = \frac{1 + 1,6875z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,15625z^{-1} + 0,09375z^{-2}} \times \frac{1 + 0,75z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,15625z^{-1} + 0,625z^{-2}}.$$

Путём расчёта можно убедиться, что этой передаточной функции $H(z)$ действительно отвечают параметры таблицы 6 для случая $M=5$.

СРАВНЕНИЕ С ДРУГИМИ АППРОКСИМАЦИЯМИ

Далее покажем, что, используя фильтры Золотарёва–Кауэра с оптимальными исходными параметрами, можно улучшить результаты, ранее полученные с помощью двух оригинальных аппроксимаций. Первая из них соответствует фильтрам с неравным числом полюсов и нулей [13, 14], а вторая – фильтрам на основе параллельного соединения двух фазовых цепей с приближённо линейной ФЧХ [15].

АППРОКСИМАЦИИ С НЕРАВНЫМ ЧИСЛОМ ПОЛЮСОВ И НУЛЕЙ

Порядки знаменателя и числителя передаточной функции классических фильтров идентичны. В работах [13, 14] предложены численные аппроксимации с неравными порядками или – иначе – с неравным числом полюсов и нулей. На примерах, в частности, в [13], показано, что если порядок знаменателя равен $N_1 = 2$, а порядок числителя N_2 выбирается, исходя из удовлетворения (1), то такой фильтр обладает хорошими параметрами ХГВЗ. Рассмотрим три варианта значений параметров в (1):

- [13]: $\Delta a_{\max} = 1$ дБ, $a_{0\min} = 60$ дБ, $f_{1n} = 0,1$ и $f_{2n} = 0,15$;
- [13]: $\Delta a_{\max} = 1$ дБ, $a_{0\min} = 60$ дБ, $f_{1n} = 0,2$ и $f_{2n} = 0,3$;
- [14]: $\Delta a_{\max} = 0,4$ дБ, $a_{0\min} = 30$ дБ, $f_{1n} = 0,2$ и $f_{2n} = 0,2465$.

Результаты [13, 14] для этих данных представлены в таблице 7. В фильтрах [13] числитель передаточной функции представляет собой зеркально-симметричный полином и поэтому обладает линейной ФЧХ. В фильтре [14] числитель содержит шесть комплексных нулей на единичной окружности и один действительный нуль внутри этой окружности. В таблице 7 также приведены результаты для фильтров Золота-

Таблица 5. Результаты синтеза двух фильтров с квантованными коэффициентами

N	M	$\Delta\tau$	Δa , дБ	f_1	f_2
4	∞	1,80	1,147	0,13075	0,2
	4	1,80	1,168	0,122	0,205
	5	1,19	0,898	0,127	0,2
5	∞	1,49	2,384	0,17025	0,2
	3	0,63	0,224	0,1321	0,2135

Таблица 6. Результаты синтеза фильтра четвёртого порядка с квантованными коэффициентами

Параметры фильтра	Алгоритм			
	ИПО [12]	ПО [12]		ВИП
		M=7	M=4	
Δa , дБ	0,26	0,38	0,24	0,19
\hat{a}_0 , дБ	31,57	41,80	32,44	31,78
$\Delta\tau$	2,444	6,697	1,826	2,394
$1-r$	0,209	0,153	0,134	0,209

Таблица 7. Сравнение двух подходов к проектированию фильтров

Вариант	N_1	N_2	$\Delta\tau$	τ_{\max}	Δa , дБ	f_1	f_2
1	2	16	15,3	22,2	–		
	6	6	34,6	40,5	1	0,1	0,15
2	2	8	7,55	11,0	–		
			13,1	15,6	1	0,2	0,3
	4,2	6,3	1	0,21926	0,3		
3	2	7	~8	~10	–		
			20,32	22,1	0,4	0,2	0,2203
	3,8	5,3	0,4	0,2256	0,2465		
	5	5	6,38	7,9	0,00369	0,18157	0,2465

рёва–Кауэра ($N_1 = N_2$) и указаны исходные параметры, по которым они получены. Видно, что если расчёт этих фильтров выполнен без оптимизации исходных параметров [13] или с предельно уменьшенной f_2 [14] (первые строки в случаях $N_1 = N_2$), то они действительно проигрывают фильтрам с $N_1 \neq N_2$ по достигнутым минимумам $\Delta\tau$. Если же расчёт проведён с учётом оптимизации исходных параметров (вторая строка в случаях $N_1 = N_2$), то фильтры Золотарёва–Кауэра оказываются предпочтительнее предложенных в [13, 14] как по $\Delta\tau$, так и по τ_{\max} (иногда желательно иметь $\tau_{\max} \rightarrow \min$).

Авторы работы [14] отмечают, что их подход (при $N_1 \neq N_2$) приводит к решению с полюсным радиусом $r = 0,888$. В то же время, рассчитанный в [14] фильтр Золотарёва–Кауэра (таблица 7, вариант 3, первая строка в случаях $N_1 = N_2$) имеет максимальное значение $r = 0,953$. Заметим, что для найденного нами оптимизированного фильтра (первая строка в случаях $N_1 = N_2$) $r = 0,951$. Для варианта 3 в таблице 7 при $N_1 = N_2$ дана третья строка результатов, которым соответствует $r = 0,880$. Указанное здесь значение $\Delta\tau$ уступает оптимальному (вторая строка), но всё же меньше достигнутого в [14].

Аппроксимация с приближённо линейной ФЧХ

Частным случаем фильтров на основе параллельного соединения двух фазовых цепей являются фильтры с чистой задержкой в качестве одной из этих цепей. Проектирование таких фильтров с требованиями (1) к АЧХ сводится к получению приближённо линейной ФЧХ (ПЛФЧХ) для другой фазовой цепи. Это обеспечивает ПЛФЧХ всего фильтра. Аналитических соотношений для такого проектирования, в отличие от общего случая, когда каждая из двух фазовых цепей не является чистой задержкой, не существует, поэтому используют численные алгоритмы. Интересно сравнить фильтры с ПЛФЧХ [15] и оптимизированные фильтры Золотарёва–Кауэра на основе параллельного соединения двух фазовых цепей.

В таблице 8 представлены результаты, полученные в [15], при следующих параметрах в (1): $\Delta a_{\max} = 0,1$ дБ, $a_{0\min} = 40$ дБ, $f_{1n} = 0,05$, $a_{f_{2n}} = 0,075$ и $0,1$. Для каждого значения f_{2n} показаны два альтернативных результата, найденных

нами и относящихся к фильтрам Золотарёва–Кауэра. Кроме того, указаны исходные параметры, по которым они получены. Здесь $A_L(z)$ – фазовая цепь порядка L . Видно, что фильтры [15] уступают фильтрам Золотарёва–Кауэра как по сложности передаточной функции $H(z)$, так и по соответствующим значениям $\Delta\tau$ и τ_{\max} . Следует, однако, заметить, что для двух других вариантов требований [15], которые будут рассмотрены ниже, фильтры Золотарёва–Кауэра уступают фильтрам [15].

Выравнивание ХГВЗ

На сегодняшний день не существует аналитического решения задачи одновременного получения желаемых АЧХ и ХГВЗ (или ФЧХ) для БИХ-фильтров. Поэтому для решения этой сложной проблемы были предложены многочисленные алгоритмы оптимизации (см. [16, 17] и ссылки в этих работах). Часто задачу упрощают, используя выравнивание ФЧХ или ХГВЗ с помощью фазового корректора (ФК), включенного последовательно с фильтром (см. ссылки в [16, 17]).

Синтез ФК также выполняется численными методами, но сфокусирован только на параметрах одной характеристики – ФЧХ или ХГВЗ, поскольку желаемая АЧХ может быть определена аналитически. При этом часто оказывается, что общий прядок (фильтр + ФК) достаточно высок, что усложняет реализацию фильтра в целом.

Здесь мы покажем, что порядок ФК может быть приемлемым и что результаты выравнивания сильно зависят от исходных параметров, по которым рассчитаны классические фильтры, а также от порядков фильтра и ФК. Вы-

равнивание ХГВЗ для всех рассмотренных ниже фильтров выполним с применением программы Piclor [18].

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОСТОГО КОРРЕКТОРА

Обратимся к двум вышеупомянутым вариантам требований к АЧХ, для которых оптимизированные фильтры Золотарёва–Кауэра имеют значения $\Delta\tau$ большие, чем фильтры с ПЛФЧХ [15]. Для этих вариантов $\Delta a_{\max} = 1 \cdot e^{-3}$ дБ и $\Delta a_{\max} = 1 \cdot e^{-5}$ дБ, а три других параметра – $a_{0\min} = 40$ дБ, $f_{1n} = 0,05$ и $f_{2n} = 0,1$ – идентичны.

В таблице 9 приведены результаты [15] для фильтров с ПЛФЧХ, а также полученные нами для фильтров Золотарёва–Кауэра без и с ФК второго порядка. Расчёты фильтров выполнены для точки С области на рисунке 1г. При этом исходные $f_1 = f_{1n}$, $f_2 = f_{2n}$, а $\Delta a = 0,00097$ дБ для первого и $\Delta a = 3 \cdot e^{-7}$ дБ для второго варианта требований. Полученные нами $\Delta\tau$ несколько больше минимальных значений, которые в данных случаях соответствуют точке В области на рисунке 1г.

Из таблицы 9 следует, что использование простого ФК позволяет существенно уменьшить значения $\Delta\tau$, достигнутые в [15]. Кроме того, такой подход даёт более простые реализации передаточных функций $H(z)$. Заметим также, что представленные фильтры с ФК в одном случае имеют большее, а в другом – меньшее значение τ_{\max} , чем фильтры с ПЛФЧХ. Найденные коэффициенты передаточной функции ФК прямой формы $A'_2(z)$ равны $c_1 = -1,52359375$, $c_2 = 0,59642167$ для первого и $c_1 = -1,42842773$, $c_2 = 0,52654699$ для второго варианта требований.

Таблица 8. Сравнение фильтров с ПЛФЧХ и фильтров Золотарёва–Кауэра

f_{2n}	Фильтр	$H(z)$	$\Delta\tau$	τ_{\max}	Δa , дБ	f_1
0,075	ПЛФЧХ	$A_{16}(z) + z^{-15}$	10,2	24,4	–	–
	ЗК	$A_3(z) + A_4(z)$	6,34	13,7	0,1	0,06813
			8,54	16,1	$5,08e^{-5}$	0,05
0,1	ПЛФЧХ	$A_8(z) + z^{-7}$	4,78	11,0	–	–
	ЗК	$A_2(z) + A_3(z)$	2,87	8,8	0,1	0,07172
			3,83	9,9	0,00097	0,05

Таблица 9. Сравнение фильтров с ПЛФЧХ и фильтров Золотарёва–Кауэра с и без ФК

Δa_{\max} , дБ	Фильтр	$H(z)$	$\Delta\tau$	τ_{\max}
$1 \cdot e^{-3}$	ПЛФЧХ	$A_{13}(z) + z^{-12}$	1,18	13,0
	ЗК ($N = 5$)	$A_2(z) + A_3(z)$	3,83	9,9
			$[A_2(z) + A_3(z)]A'_2(z)$	0,390
$1 \cdot e^{-5}$	ПЛФЧХ	$A_{17}(z) + z^{-16}$	0,549	16,5
	ЗК ($N = 7$)	$A_3(z) + A_4(z)$	2,56	8,3
			$[A_3(z) + A_4(z)]A'_2(z)$	0,129

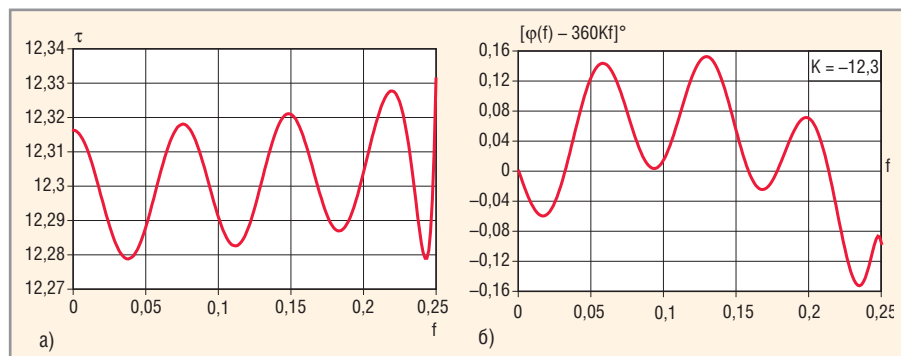


Рис. 12. ХГВЗ (а) и характеристика отклонения ФЧХ от прямой линии (б) для фильтра Золотарёва–Кауэра пятого порядка с ФК седьмого порядка

Исходные параметры и порядки фильтра и корректора

Выполним выравнивание ХГВЗ для фильтра Золотарёва–Кауэра, АЧХ которого удовлетворяет (1) при $\Delta a_{\max} = 0,376$ дБ, $a_{0\min} = 53,5$ дБ, $f_{1n} = 0,025$ и $f_{2n} = 0,05$.

В таблице 10 представлены результаты для $N=5$ (минимальный порядок) и $N=6$. Выравнивание проведено для точек А, В, С и D (см. рис. 1г) с помощью ФК пятого и шестого порядков. Результирующий порядок каждого из фильтров равен 10 и 12, что требует при реализации 12 и 15 умножителей соответственно, с учётом каскадной реализации фильтров на звеньях не выше второго порядка с двумя умножителями на звено. Для каждой точки

представлены полученные параметры ХГВЗ и ФЧХ до (верхняя строка) и после (нижняя строка) выравнивания, а также исходные параметры $\Delta a, f_1$. Напомним, что для всех рассматриваемых точек $f_2 = f_{2n}$. Наилучшее решение в смысле минимума $\Delta\tau$, без ФК получено в точке В для каждого N , а с ФК – в точке В при $N=5$ и в точке D при $N=6$.

Мы наблюдаем сильное различие степени выравнивания ХГВЗ для точки А в сравнении с результатами для трёх других точек. Максимальное отличие по $\Delta\tau$ достигает более $9,25/0,224 \approx 41$ раза при $N=5$ и более $21,35/0,0018 \approx 1100$ раз при $N=6$. Для улучшения результатов выравнивания в точке А требуется увеличить порядок ФК. Однако выравнивание при $N=5$ с помощью ФК одиннадцатого порядка для точки,

близкой к А, дает лишь $\Delta\tau = 1,57$ [19] против достигнутого нами $\Delta\tau = 0,246$ в точке В при $N=5$ и ФК пятого порядка. Таким образом, выполненное в [19] на ряде примеров сравнение с методом выравнивания ХГВЗ требует уточнения.

Следует отметить, что предложенный численный метод проектирования фильтров с равноволновыми АЧХ и ХГВЗ [19] приводит к превосходным решениям с экстремально низкими $\Delta\tau$. В частности, для обсуждаемого примера авторы [19] получили $\Delta\tau = 0,0003$, $\tau_{\max} = 63,5$, $\Delta\hat{a} = 0,376$ дБ и $\hat{a}_0 = 53,5$ дБ. Это решение соответствует последовательному соединению БИХ-фильтра двенадцатого порядка без нулей передачи и КИХ-фильтра с линейной ФЧХ восьмого порядка. Сложность всего фильтра – 17 умножителей. Заметим, что полученное в [19] τ_{\max} меньше, чем любое значение, представленное в таблице 10 для варианта с ФК.

Проведём выравнивание ХГВЗ для ещё одного фильтра, АЧХ которого удовлетворяет (1) при $\Delta a_{\max} = 0,5$ дБ, $a_{0\min} = 32$ дБ, $f_{1n} = 0,25, f_{2n} = 0,3$. В этом случае область S на рисунке 1г для фильтра Золотарёва–Кауэра при $N=4$ является почти точкой, и улучшить ХГВЗ можно, лишь увеличив порядок фильтра и/или добавив ФК.

В таблице 11 представлены результаты выравнивания ХГВЗ фильтра Золотарёва–Кауэра при $N=4$ с ФК восьмого порядка [20] и полученные нами при $N=5$ с ФК седьмого и шестого порядков. Оба наших решения соответствуют точке В ($\Delta a = \Delta a_{\max}, f_1 = f_{1\max} = 0,2780666, f_2 = f_{2n}$) области S на рисунке 1г. Для точек С и D результаты выравнивания оказались хуже. Кроме параметров ХГВЗ и ФЧХ, в таблице 11 указаны порядки составных фильтров (собственно фильтров и ФК), а также число содержащихся в них умножителей (знак ×) в случае их каскадной реализации. По первым трём строкам таблицы видно, что результаты [20] существенно улучшены, причём без усложнения всего фильтра. Найденные коэффициенты звеньев ФК седьмого порядка c_1, c_2 равны:

- $-0,70055859, 0,35208008$ – звено 1;
- $-0,26747656, 0,37754597$ – звено 2;
- $-1,03277734, 0,33848115$ – звено 3;
- $-0,57729687, 0$ – звено 4.

Последовательное соединение фильтра Золотарёва–Кауэра и этого ФК даёт ХГВЗ на рисунке 12а и характеристику отклонения ФЧХ от прямой линии

Таблица 10. Параметры ХГВЗ и ФЧХ фильтров Золотарёва–Кауэра с и без ФК

N	Точка	$\Delta\tau$	τ_{\max}	$\Delta\varphi^\circ$	K	Δa , дБ	f_1
5	А	49,9	71,8	20,8	-27,46	0,376	0,025
		9,3	113,3	2,5	-108,54		
	В	10,3	26,9	8,3	-18,78	0,376	0,0311357
		0,224	72,2	0,075	-72,09		
	С	19,3	36,8	10,3	-20,31	0,0270627	0,025
		0,643	86,3	0,177	-86,02		
	D	22,9	40,6	12,3	-21,09	0,006463	0,0220378
		0,421	87,9	0,123	-87,70		
6	А	77,8	104,3	28,7	-35,19	0,376	0,025
		21,4	151,0	6,4	-137,4		
	В	7,3	21,7	4,7	-16,64	0,376	0,0382449
		0,119	83,6	0,047	-83,50		
	С	11,2	27,6	6,7	-18,46	0,0004809	0,025
		0,093	87,5	0,027	-87,44		
	D	16,7	33,8	9,9	-19,91	6,26e-11	0,0071248
		0,018	90,3	0,0045	-90,33		

Таблица 11. Параметры ХГВЗ и ФЧХ фильтров, полученные в различных публикациях

Источник	$\Delta\tau$	τ_{\max}	$\Delta\varphi^\circ$	K	Порядок	×
[20]	1,32	16,6	2,22	-15,95	4 + 8 = 12	6 + 8 = 14
Данная статья	0,052	12,3	0,154	-12,30	5 + 7 = 12	7 + 7 = 14
	0,094	11,0	0,252	-10,94	5 + 6 = 11	7 + 6 = 13
[21]	0,16	15,2	0,262	-15,1	12	24
[22]	0,036	14,0	0,063	-14,0	12	22
[17]	0,031	14,0	0,042	-14,0	12	24

$(\phi(f) - K360f)$ на рисунке 12б. Эти характеристики подтверждают параметры таблицы 11 для решения с ФК седьмого порядка.

В трёх нижних строках таблицы 11 представлены также результаты решения задачи одновременного получения желаемых АЧХ и ХГВЗ (ФЧХ) [17, 21, 22] для фильтра двенадцатого порядка с равным числом нулей и полюсов. Значения Δt , $\Delta \phi$ для найденных нами решений находятся между достигнутыми в [21] и [17, 22]. Здесь мы получили наименьшие τ_{\max} . По числу умножителей фильтра [17, 21, 22] значительно проигрывают фильтрам Золотарёва–Кауэра с коррекцией ХГВЗ.

Таким образом, на примерах мы убедились, что выбор исходных параметров АЧХ, порядков фильтра и корректора существенно влияют на результаты выравнивания ХГВЗ.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Неравномерность ХГВЗ и/или нелинейность ФЧХ в номинальной полосе пропускания классических цифровых БИХ-фильтров могут быть минимизированы с помощью выбора исходных параметров АЧХ в пределах определенной области допуска. Мы ограничились рассмотрением только фильтров нижних частот с АЧХ Баттерворта, Чебышева (I и II) и Золотарёва–Кауэра.

Для фильтров Баттерворта и Чебышева II максимальное уменьшение неравномерности АЧХ в полосе пропускания приводит к минимуму неравномерности ХГВЗ и нелинейности ФЧХ. При этом для фильтров Чебышева II это достигается прямым расчётом по исходным предельно допустимым параметрам.

Для фильтров Чебышева I и Золотарёва–Кауэра требуется найти два исходных параметра, а именно, неравномерность АЧХ в полосе пропускания и граничную частоту этой полосы. Процедура сводится к простому однопараметрическому поиску. Для этих фильтров минимум неравномерности ХГВЗ не обязательно соответствует минимуму нелинейности ФЧХ, и наоборот.

Наилучшие результаты по параметрам ХГВЗ и ФЧХ даёт аппроксимация Золотарёва–Кауэра, затем Чебышева II или Чебышева I (в зависимости от ширины номинальной полосы пропускания) и лишь потом – аппроксимация Баттерворта. При этом подразумевает-

ся, что все фильтры удовлетворяют заданным требованиям к АЧХ и имеют идентичные порядки.

На конкретных примерах проиллюстрировано, что оптимизированные фильтры Золотарёва–Кауэра не уступают по минимально достижимой неравномерности ХГВЗ ранее предложенным в литературе фильтрам с неравным числом полюсов и нулей.

Для решения задачи минимизации неравномерности ХГВЗ фильтра с квантованными коэффициентами можно применить метод вариации исходных параметров. Полученные результаты для конкретных примеров существенно лучше решений, найденных методом простого округления и одним из эффективных алгоритмом вариации коэффициентов на дискретном множестве их значений.

Степень выравнивания ХГВЗ с помощью фазовых корректоров может очень сильно зависеть от исходных параметров АЧХ фильтров. Так, разброс результатов выравнивания для конкретного фильтра Золотарёва–Кауэра достигает более 1100 раз. Степень выравнивания ХГВЗ существенно зависит также от порядков фильтра и корректора. Поэтому задачу выравнивания ХГВЗ желательно решать комплексно, с учётом всех факторов влияния. Представляется, что сравнения метода одновременной аппроксимации АЧХ и ХГВЗ с методом выравнивания ХГВЗ классических фильтров, выполненные в ранних публикациях, требуют уточнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мингазин А.Т.* Начальные приближения для синтеза цифровых фильтров с минимальной длиной слова коэффициентов. Электронная техника. 1983. Сер. 10. № 6. С. 3–8.
2. *Савченко С.М., Смирнов Э.Е.* Улучшение частотных характеристик эллиптических фильтров. Изв. вузов СССР. Сер. Радиоэлектроника. 1976. Т. XIX. № 6. С. 113–116.
3. *Мингазин А.Т.* Способ улучшения характеристик затухания фильтров. Радиотехника. 1985. № 9. С. 89–91.
4. *Vlcek M., Unbehauen R.* Degree, ripple and transition width of elliptic filters. IEEE Trans. CAS-36. 1989. № 3. PP. 469–472/
5. *Мингазин А.Т.* Экстремальные параметры аналоговых и цифровых фильтров. Электросвязь. 1999. № 1. С. 22–23.
6. *Tosic D.V., Lutovac M. D., Evans B.L.* Advanced digital IIR filter design. ECCTD. 1999. PP. 1323–1326.

7. *Corral C.A., Lindquist C.S.* Design for optimum classical filters. Proc. IEE Circuit Devices Syst. 2002. Vol. 149. № 5/6. PP. 291–301.
8. *Алёшин Д.В., Мингазин А.Т.* Программа для расчёта экстремальных параметров цифровых и аналоговых фильтров и ее применение. Цифровая обработка сигналов. 2006. № 1. С. 45–49.
9. *Dimopoulos H.G.* Optimal use of some classical approximations in filter design. IEEE Trans. CAS-II. 2007. Vol. 54. № 9. PP. 780–784.
10. Мошитц Г., Хорн П. Проектирование активных фильтров. Мир, 1984.
11. *Мингазин А.Т.* Синтез цифровых фильтров для высокоскоростных систем на кристалле. Цифровая обработка сигналов. 2004. № 2. С. 14–23.
12. *Radecki J., Konrad J., Dubois E.* Design of finite wordlength IIR filters with prescribed magnitude, group delay and stability properties using simulated annealing. ICASSP. 1991. PP. 1637–1640.
13. *Jackson L.B.* An improved Martinez/Parks algorithm for IIR design with unequal numbers of poles and zeros. IEEE Trans. SP-42. 1994. № 5. PP. 1234–1238.
14. *Quelbas M.F., Petraglia A.* Digital filter design optimization using partial cost functions. ISCAS. 2009. PP. 285–288.
15. *Jobansson H., Wanbamm L.* Design of linear-phase lattice wave digital filters. Report LITH-ISY-R1930. 1997.
16. *Guindon D., Shpak D.J., Antoniou A.* Design methodology for nearly linear-phase recursive digital filters by constrained optimization. IEEE Trans. CAS-I. 2010. V. 57. № 7. PP. 1719–1731.
17. *Lai X., Lin Z.* Minimax phase error design of IIR digital filters with prescribed magnitude and phase responses. IEEE Trans. SP-60. 2012. № 2. PP. 980–986.
18. *Зорич А.А., Мингазин А.Т.* Программа интерактивного управления дислокацией корней полиномов числителя и знаменателя передаточных функций цифровых фильтров. Электросвязь. 1995. № 5. С. 36–37.
19. *Saramaki T., Neuvo Y.* Digital filters equiripple magnitude and group delay. IEEE Trans. ASSP-32. 1984. № 6. PP. 1194–1200.
20. *Deczky A.G.* Equiripple and minimax (Chebyshev) approximation for recursive digital filters. IEEE Trans. ASSP-22. 1974. № 2. PP. 98–111.
21. *Inukai T.* A unified approach to optimal recursive digital filter design. IEEE Trans. CAS-27. 1980. № 7. PP. 646–649.
22. *Sullivan J.L., Adams J.W.* PCLS IIR digital filters with simultaneous frequency response magnitude and group delay specifications. IEEE Trans. SP-46. 1998. № 11. PP. 2853–2861.