

МАКСИМАЛЬНАЯ АМПЛИТУДА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ В ЦИФРОВОМ ФИЛЬТРЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРЯМОЙ ФОРМЫ ПРИ НУЛЕВОМ ВХОДЕ

Мингазин А.Т.

РАДИС Лтд, Россия, Москва, Зеленоград, 124460, а/я 20.

Тел./факс. 499-735-35-13, e-mail: alexmin@orc.ru

Реферат. Рассматривается цифровой БИХ-фильтр второго порядка прямой формы, оперирующий с фиксированной точкой и одним округлением после суммирования. Анализируются существующие верхние границы амплитуды предельных циклов при нулевом входе фильтра и их фактическая максимальная амплитуда, найденная прямым моделированием с помощью алгоритма исчерпывающего поиска. Установлены области коэффициентов, где максимальная амплитуда легко определяется аналитически.

Введение. Хорошо известно, что при нулевом входе и произвольных внутренних переменных ошибка на выходе БИХ-фильтра, обусловленная округлением в цепях обратной связи, если не становится равной нулю, то принимает детерминированный колебательный характер. На выходе фильтра возникает малый предельный цикл. Важно знать максимальную амплитуду предельных циклов, чтобы оценить степень их допустимости или полностью устранить их путем реквантования на выходе фильтра [1]. Существующие границы на максимальную амплитуду предельных циклов могут давать заниженные или завышенные результаты. Фактическая максимальная амплитуда может быть найдена прямым моделированием с помощью алгоритмов исчерпывающего поиска для всех возможных значений переменных внутри фильтра. Данная работа посвящена проблеме определения максимальной амплитуды предельных циклов в фильтре второго порядка прямой формы при нулевом входе, оперирующим с фиксированной точкой и одним округлением после суммирования. В результате выполненных исследований выявлены области коэффициентов, в которых фактическая амплитуда может быть легко найдена аналитически по известным соотношениям.

Описание фильтра. Передаточную функцию цифрового БИХ-фильтра второго порядка представим в виде

$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}.$$

Соответствующее разностное уравнение, в котором учтена операция квантования (округления) Q , имеет вид

$$y_n = Q(x_n - a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2})$$

и описывает структуру фильтра прямой формы. Коэффициенты фильтра находятся в треугольнике устойчивости, т.е. имеет место условие

$$|a_1| - 1 < a_2 < 1.$$

Положим, что фильтр оперирует с фиксированной точкой, абсолютная величина переменных на входе и внутри фильтра меньше единицы.

Верхние границы амплитуды предельных циклов. Для обсуждаемого фильтра рассмотрим три известных варианта оценки верхней границы амплитуды предельных циклов при нулевом входе ($x_n = 0$).

Первый вариант оценки – метод [2] основан на местоположении так называемых эффективных полюсов фильтра, обусловленном округлением. Согласно этому методу максимальная амплитуда предельного цикла при нулевом входе

$$A_{\max} \leq \frac{q}{2} \left(\frac{1}{1 - |a_2|} \right) \quad (1)$$

для полюсов попадающих на единичную окружность и

$$A_{\max} \leq q \left(\frac{1}{1 - |a_1| + a_2} \right) \quad (2)$$

для полюсов попадающих в точку $z=1$ или $z=-1$ на единичной окружности. Здесь q – шаг квантования. Эти формулы получены для квантования (округления) после каждого умножения. Далее приведены соотношения для обсуждаемого нами случая округления после суммирования.

Второй вариант оценки - широко известный детерминированный метод основан на вычислении l_1 - нормы для импульсной характеристики фильтра $h(n)$. В этом случае

$$A_{\max} \leq \frac{q}{2} \|h\|_1 = \frac{q}{2} \sum_{n=0}^{\infty} |h(n)|. \quad (3)$$

Для фильтра с полюсным радиусом очень близким к единице и/или с полюсным углом очень близким к 0 или π требуется большое время расчета (3) на компьютере. Были предприняты попытки получения замкнутого выражение для $\|h\|_1$ [3-5]. Так, авторы [3] нашли точное соотношение в случае действительных полюсов, совпадающее с выражением в скобках в (2), и лишь приближенное - в случае комплексно-сопряженных полюсов. Аналогичные результаты получены в [4]. Более точная, но все же приближенная оценка $\|h\|_1$ для комплексно-сопряженных полюсов предложена в [5].

Не трудно показать, что при $a_1=0$ и $0 < a_2 < 1$ (частный случай комплексно-сопряженных полюсов) норма $\|h\|_1 = 1/(1 - a_2)$. В тоже время использование соотношений из [3] и [5] приводит к превышению этой нормы $\|h\|_1$ соответственно в $1 + \sqrt{a_2}$ и $[1 + (2\sqrt{2} - 1)a_2]/(1 + a_2)$ раз, а при $a_2 \rightarrow 1$ эти превышения стремятся к 2 и $\sqrt{2}$ раз.

Третий вариант оценки верхней границы амплитуды предельного цикла [6] основан на вычислении L_{∞} - нормы для передаточной функции фильтра. При этом

$$A_{\max} \leq \frac{q}{2} \|H\|_{\infty} = \frac{q}{2} |H(z)|_{\max}, \quad (4)$$

где

$$\|H\|_{\infty} = \begin{cases} \frac{1}{(1-a_2)\left(1-\frac{a_1^2}{4a_2}\right)^{1/2}} & \text{для } a_2 > 0 \text{ и } |a_1| < \frac{4a_2}{1+a_2}, \\ \frac{1}{1-|a_1|+a_2} & \text{для } a_2 \leq 0 \text{ или } a_2 > 0, |a_1| \geq \frac{4a_2}{1+a_2}. \end{cases}$$

Можно убедиться, что верхнее выражение для $\|H\|_{\infty}$ соответствует комплексно-сопряженным полюсам, а нижнее, совпадающее с выражением в скобках в (2), - как действительным, так и комплексно-сопряженным полюсам. Учитывая изложенное ранее можно заключить, что $\|h\|_1 = \|H\|_{\infty}$ для действительных полюсов и для комплексно-сопряженных полюсов при $a_1=0$ и $0 < a_2 < 1$. В общем случае, как известно $\|h\|_1 \geq \|H\|_{\infty}$.

Отсутствие предельных циклов. В рассматриваемом фильтре при нулевом входе предельные циклы отсутствуют, если имеет место условие (см. например [7])

$$|a_1| - 0,5 < a_2 < 0,5. \quad (5)$$

Заметим, что в сложных фильтрах, особенно с узкой полосой (пропускания, задерживания или переходной), состоящих из ряда звеньев второго порядка это условие обычно не выполняется.

Фактическая максимальная амплитуда предельного цикла. Соотношения (1) - (4) не всегда приводят к верным оценкам максимальной амплитуды предельных циклов при нулевом входе. Фактическую максимальную амплитуду определим путем прямого моделирования, применив исчерпывающий поиск для возможных значений двух внутренних переменных рассматриваемого фильтра. Диапазон изменения этих переменных ограничим с верху границей (3).

Проведенные нами многочисленные расчеты с использованием алгоритма исчерпывающего поиска [8] и анализ результатов позволили установить области коэффициентов, для которых фактическая максимальная амплитуда предельных циклов может быть вычислена аналитически согласно табл.1. Здесь подразумевается, что коэффициенты

Таблица 1

A_{\max}	Области коэффициентов
$q \left[\frac{0,5}{1- a_1 +a_2} \right]$	$a_2 \leq 0,5 a_1 $ и $ a_1 - 0,5 \geq a_2 \leq 0,7499$
$q \left[\frac{0,5}{1-a_2} \right]$	($a_2 > 0,6699$ при $ a_1 =0$ или 1) или ($0,5 \leq a_2 \leq 0,6699$ и $ a_1 - 0,5 > a_2$)
0	$ a_1 - 0,5 < a_2 < 0,5$
?	в остальных случаях

находятся в описанном выше треугольнике устойчивости, $\lfloor x \rfloor$ - целая часть x . В табл.1 показана также область отсутствия предельных циклов (5), когда $A_{\max} = 0$. Для случаев $A_{\max} = ?$ фактическая максимальная амплитуда может быть найдена алгоритмами

исчерпывающего поиска, например [8]. По существу мы обнаружили, что два известных соотношения, используемых в [2,3] для оценки верхней границы амплитуды предельных циклов A_{\max} , дают фактическую максимальную амплитуду для областей коэффициентов указанных в табл. 1.

На рис.1 для правой половины треугольника устойчивости показаны области коэффициентов представленные в табл. 1. Левая половина зеркально симметрична.

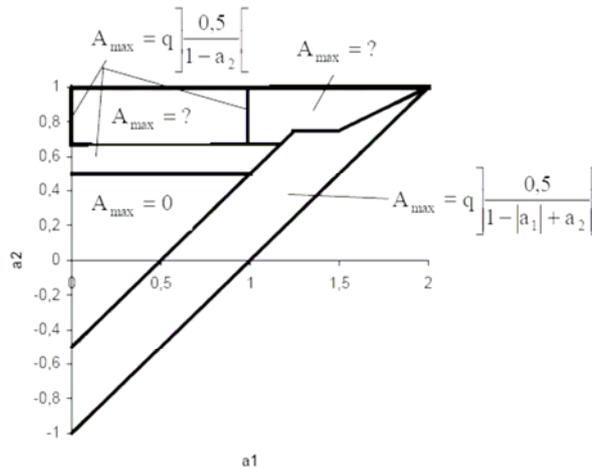


Рис.1

Заметим, что прямые $a_2=0,6699$, $a_2=0,7499$ и $a_2 = 0,5|a_1|$ на рис.1 являются аппроксимациями более сложных кривых. При этом области коэффициентов, где справедливы два выражения для расчета A_{\max} , несколько шире, чем показанные в табл.1 и на рис.1.

Заключение. Для цифрового БИХ-фильтра второго порядка прямой формы, оперирующего с фиксированной точкой и одним округлением после суммирования, определены области коэффициентов, для которых фактическая максимальная амплитуда предельных циклов при нулевом входе может быть рассчитана по хорошо известным простым формулам. Это интересное обстоятельство позволяет на практике найти фактическую максимальную амплитуду предельных циклов, не прибегая к исчерпывающему поиску, который может оказаться не приемлемым из-за чрезмерных вычислительных затрат.

Литература

1. Butterweck H.-J., Ritzerfeld J., Werter M. Finite wordlength effects in digital filters. AEU. 1989. V. 43. №2. PP.76-89.
2. Jackson L.B. An analysis of limit cycles due to multiplication rounding in recursive digital filters. Proc. 7th Annual Allerton Conf. Circuits Theory. 1969. Oct. PP.69-78.
3. Long J.E., Trick T.N. An absolute bounds on limit cycles due to roundoff errors in digital filters. IEEE Trans. 1973. AU-21. Feb. PP.27-30.
4. Yakowitz S., Parker S.R. Computation of bounds for digital filter quantization error. IEEE Trans. 1973. CT-20. July. PP.391-396.
5. Chang T.L. A note on upper bounds on limit cycles in digital filters. IEEE Trans. 1976. ASSP-24. Feb. PP.99-100.
6. Sandberg I.W., Kaiser J.F. A bound on limit cycles in fixed-point implementations of digital filters. IEEE Trans. 1972. AU-20. June. PP.110-112.
7. Bauer P.H., Leclerc L.-J. A computer-aided test for the absence of limit cycles in fixed-point digital filters. IEEE Trans. 1991. SP-24. Nov. PP.2400-2410.
8. Djebbari A., Belbachir M. F., Rouvaen J.M. A fast exhaustive search algorithm for checking limit cycles in fixed-point digital filters. Signal Processing. 1998. V.69. PP.199-205.