

**СИНТЕЗ ПОЛУПОЛОСНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ БЕЗ УМНОЖИТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ФАЗОВЫХ ЦЕПЕЙ**

Мингазин А. Т.

РАДИС Лтд

Россия, Москва, Зеленоград, 124460, а/я 20

Тел./факс. (095) 535-02-70, 532-06-63, e-mail: alexmin@orc.ru

**Реферат.** Для синтеза полуполосных цифровых фильтров без умножителей на основе параллельного соединения двух фазовых цепей предложено использовать упрощенный алгоритм вариации исходных параметров. Приведен пример синтеза фильтра 9-го порядка. Представлен каталог из 15-ти полуполосных фильтров Золотарева-Кауэра 3-го порядка, для реализации которых требуется не более двух сумматоров, заменяющих умножители.

**1. Введение.** Полуполосные цифровые фильтры широко используются при интерполяции и прореживании во многих системах с цифровой обработкой сигналов. В частности на их основе строятся узкополосные фильтры, подполосные кодеки, трансмультиплексоры и другие устройства. Полуполосные фильтры без умножителей на основе параллельного соединения двух фазовых цепей, состоящих из каскада звеньев 2-го порядка, очень экономичны для реализации на заказных или полузаказных СБИС. В таких фильтрах половина коэффициентов равна нулю, а каждый коэффициент не равный нулю представлен в виде некоторой комбинации чисел равных степени два. В этом случае умножение на единственный коэффициент в звене заменяется операциями сдвига и суммирования (вычитания). На этапе синтеза фильтров важно минимизировать полное число сумматоров, заменяющих умножители [1-5]. Для этой цели в [4] применен двухэтапный алгоритм вариации исходных параметров (ВИП) и на конкретных примерах продемонстрирована его эффективность. В данной статье уточнена задача синтеза полуполосных цифровых фильтров и предложено использовать более простой в программировании ВИП алгоритм, который приводит к тем же результатам, что и алгоритм из [4].

**2. Полуполосные фильтры Золотарева-Кауэра.** Полуполосные цифровые фильтры на основе параллельного соединения двух фазовых цепей описываются передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1}{2} \left( \prod_{i=1,3,\dots}^K \frac{\beta_i + z^{-2}}{1 + \beta_i z^{-2}} \pm z^{-1} \prod_{i=2,4,\dots}^K \frac{\beta_i + z^{-2}}{1 + \beta_i z^{-2}} \right), \quad (1)$$

$$K \leq (N-1)/2, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_K < 1.$$

Здесь N-нечетный порядок фильтра, знак плюс соответствует ФНЧ, а – минус ФВЧ.

Для полуполосных фильтров Золотарева-Кауэра при фиксированном N коэффициенты в (1) являются некоторыми функциями лишь одного исходного параметра

$$\beta_i = \Psi_i(f_s), \quad (2)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, (N-1)/2,$$

где  $f_s$  - граничная частота полосы задерживания, нормированная относительно частоты дискретизации.

Полуполосный фильтр 3-го порядка описывается только одним коэффициентом  $\beta_1$ . Используя явное выражение для (2) из [6], можно показать, что при изменении  $f_s$  в интервале  $0.25 < f_s < 0.5$  (для ФНЧ) значение  $\beta_1$  монотонно изменяется в диапазоне  $1 > \beta_1 > 1/3$ . Любое значение коэффициента, в том числе и квантованное, из этого диапазона соответствует некоторому полуполосному фильтру Золотарева-Кауэра. Интересно, что  $\beta_1 = 1/3$  определяет полуполосный фильтр Баттерворта 3-го порядка и следовательно не существует этих фильтров с квантованным коэффициентом (известно, что коэффициенты полуполосных фильтров Баттерворта зависят только от N).

**3. Задача синтеза полуполосных фильтров без умножителей.** Для синтеза полуполосных фильтров с передаточной функцией вида (1) достаточно контролировать лишь одну из полос – полосу задерживания или пропускания. Пусть имеет место (2), тогда задачу синтеза полуполосных фильтров без умножителей с помощью ВИП алгоритма можно сформулировать как

$$\Sigma_m(f_s) \rightarrow \min_{f_s}, \tilde{a}_0(f_s) \geq a_{0\min}, f_s \in S,$$

где  $\tilde{a}_0$  - минимальное ослабление АЧХ фильтра в номинальной полосе задерживания; символ  $\sim$  означает соответствие квантованию коэффициентов в (2);  $a_{0\min}$  - заданное допустимое ослабление;  $\Sigma_m$  - полное число сумматоров, заменяющих умножители;  $S$  - область возможных значений  $f_s$ , которая включает заданное номинальное значение  $f_{sn}$ .

В результате решения этой задачи получим квантованные коэффициенты, которые не будут соответствовать фильтру Золотарева-Кауэра, за исключением случая, когда  $N=3$  и  $1 > \beta_1 > 1/3$ . Заметим, что синтез полуполосных фильтров Золотарева-Кауэра без умножителей при  $N=3$  можно считать тривиальной задачей, которая может быть решена без использования (2) путем прямой подстановки “хороших” значений  $\beta_1$  в (1) с последующим анализом  $\tilde{a}_0$ .

**4. Алгоритм синтеза.** Решение сформулированной задачи может быть найдено с помощью двух-этапного ВИП алгоритма из [4]. Первый этап - определение начальных точек методом ветвей и границ, второй этап - локальная вариация параметра  $f_s$ . В этом алгоритме необходимо многократно решать трансцендентное уравнение. Упрощенный ВИП алгоритм, по существу подобный описанному в [7], свободен от этой процедуры и заключается в следующем: параметр  $f_s$  изменяется в области  $S$  для ряда значений шага квантования коэффициентов  $q = q_{\max}, q_{\max}/2, \dots$  до тех пор пока для некоторого  $q = q_0$  и  $q_0/2$  не будут найдены все допустимые решения с  $\tilde{a}_0 \geq a_{0\min}$ . Далее из них выбирается вариант с минимальным числом  $\Sigma_m$ .

Заметим, что в  $S$  имеется конечное число подобластей, которым соответствуют свои векторы коэффициентов [7]. В алгоритме определяются все подобласти и оценка решения на допустимость для каждой из них выполняется только один раз. В эвристическом алгоритме [2] эти важные детали не описаны.

Результаты синтеза полуполосных фильтров из [2] и [4] могут быть воспроизведены с помощью упрощенного ВИП алгоритма. Далее обсуждается другой пример синтеза и представлен каталог полуполосных фильтров Золотарева-Кауэра 3-го порядка, который был получен путем решения (2) для ряда квантованных коэффициентов.

**5. Пример.** Требования к полуполосному фильтру:  $a_{0\min} = 47$  дБ,  $f_{sn} = 0.27$ ,  $N=9$ .

В [5] с помощью алгоритма вариации коэффициентов (ВК) найдено следующее решение  $\Sigma_m=7$ ,  $\beta_1 = 2^{-3} + 2^{-6}$ ,  $\beta_2 = 2^{-1} - 2^{-4} - 2^{-9}$ ,  $\beta_3 = (1 - 2^{-2})(1 - 2^{-4})$ ,  $\beta_4 = 1 - 2^{-3} + 2^{-5}$ .

Можно убедиться, что этим коэффициентам соответствует  $\tilde{a}_0=45$  дБ, а не 47 дБ.

Описанный выше ВИП алгоритм приводит к ряду решений с  $\tilde{a}_0 \geq 45$  дБ, два из них имеют вид  
вар.1:  $f_s = 0.271415$ ,  $\Sigma_m=8$ ,  $\tilde{a}_0=47$  дБ,

$$\beta_1 = 2^{-3} + 2^{-7}, \beta_2 = 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-5} + 2^{-7}, \beta_3 = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4}, \beta_4 = (1 + 2^{-5})(1 - 2^{-3}).$$

вар.2:  $f_s = 0.265030$ ,  $\Sigma_m=7$ ,  $\tilde{a}_0=45$  дБ,

$$\beta_1 = 2^{-3} + 2^{-5}, \beta_2 = 2^{-1} - 2^{-5} + 2^{-9}, \beta_3 = (2^{-1} + 2^{-2})(1 - 2^{-6}), \beta_4 = 1 - 2^{-4} - 2^{-6}.$$

Вар.1 удовлетворяет требованию по  $\tilde{a}_0$ , но уступает решению [5] по  $\Sigma_m$  на один сумматор. Вар.2 эквивалентен этому решению и имеет другие коэффициенты.

Используем коэффициенты вар.1 в качестве начальных в алгоритме ВК. Применение алгоритма приводит к следующему решению

вар.3:  $\Sigma_m=6$ ,  $\tilde{a}_0=46$  дБ,

$$\beta_1 = 2^{-3}, \beta_2 = (2^{-1} - 2^{-4})(1 - 2^{-4}), \beta_3 = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4}, \beta_4 = (1 + 2^{-5})(1 - 2^{-3}).$$

Как видим относительно вар.1 сэкономлено два сумматора, но  $\tilde{a}_0$  уменьшено на 1 дБ, а относительно вар.2 и решения [5] сэкономлен один сумматор и  $\tilde{a}_0$  улучшено на 1 дБ.

Представленная в [5] структура каждого из четырех фазовых звеньев содержит 3 сумматора. Для получения выходов ФНЧ и ФВЧ требуется еще два сумматора. Поэтому полное число сумматоров в структуре фильтра  $\Sigma = \Sigma_m + 3 \times 4 + 2 = 21$ . Если для реализации фазовых звеньев использовать прямую форму, содержащую два сумматора, то для вар.3 получим  $\Sigma = 16$ .

**6. Каталог полуполосных фильтров Золотарева-Кауэра 3-го порядка.** В таблице представлены коэффициенты и параметры полуполосных цифровых фильтров Золотарева-Кауэра 3-го порядка.

Таблица

Фильтр	1	2	3	4	5	6	7	8
$\beta_1$	$2^{-1} + 2^{-2}$	$2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4}$	$2^{-1} + 2^{-3}$	$2^{-1} + 2^{-4}$	$2^{-1}$	$2^{-1} - 2^{-5}$	$2^{-1} - 2^{-4}$	$(1 - 2^{-4}) \times (2^{-1} - 2^{-4})$
$f_s = f_{sn}$	0.263822	0.271403	0.281561	0.295354	0.314677	0.327493	0.343496	0.361343
$\tilde{a}_0$ , дБ	11.1	13.2	15.5	18.4	22.3	24.8	28.0	31.8
$\Delta\tilde{a}$ , дБ	0.35	0.22	0.12	0.063	0.026	0.014	0.0068	0.0029
$\Delta\tilde{\tau}$	5.0	3.4	2.3	1.6	1.0	0.77	0.56	0.39

продолжение таблицы

9	10	11	12	13	14	15
$(1 + 2^{-4}) \times (2^{-2} + 2^{-3})$	$(1 - 2^{-3}) \times (2^{-1} - 2^{-4})$	$2^{-2} + 2^{-3}$	$(1 - 2^{-5}) \times (2^{-1} - 2^{-3})$	$2^{-2} + 2^{-3} - 2^{-6}$	$(1 + 2^{-3}) \times (2^{-2} + 2^{-4})$	$2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-5}$
0.370575	0.385009	0.393448	0.408312	0.414071	0.427368	0.444521
33.9	37.3	39.5	43.7	45.5	50.1	57.3
0.0018	0.0008	0.0005	0.00018	0.0001	0.00004	0.00001
0.325	0.24	0.20	0.14	0.12	0.084	0.048

Здесь  $\Delta\tilde{a}$  - неравномерность АЧХ в полосе пропускания, а  $\Delta\tilde{\tau}$  - неравномерность ГВЗ в отчетах частоты дискретизации. Количество суммирований в представленных коэффициентах не превышает двух. Только для фильтра-5 умножение на коэффициент не требует сумматоров.

**7. Заключение.** Для синтеза полуполосных цифровых фильтров без умножителей на основе параллельного соединения двух фазовых цепей можно применить упрощенный ВИП алгоритм. Приведен пример синтеза фильтра 9-го порядка с минимальным полным числом сумматоров, заменяющих умножители. Показано, что для данного фильтра дополнительное уменьшение числа сумматоров может быть достигнуто объединением ВИП алгоритма и вариации коэффициентов. Представлен каталог из 15-ти полуполосных фильтров Золотарева-Кауэра 3-го порядка экономичных для реализации на СБИС.

#### Литература

1. Gulluoglu S.N., Wegener W., Gazsi L. Catalog of bireciprocal wave digital low-pass filters with discrete optimized coefficients. // IASTED. 1985. June. -P. 120-123.
2. Samueli H. A low-complexity multiplierless half-band recursive digital filter design. //IEEE Trans. 1989. ASSP-37. No. 3. -P. 442- 444.
3. Milic L. D., Lutovac M. D. Design of multiplierless elliptic IIR filters with a small quantization error. //IEEE Trans. 1999. SP-47. No. 2. -P. 469- 479.
4. Мингазин А.Т. Синтез цифровых фильтров на основе фазовых цепей с конечной длиной слова коэффициентов. //2-я международная конференция 'Цифровая обработка сигналов и ее применение'. 1999. Т. 1. -С. 112-116.
5. Lutovac B.M., Lutovac M.D. Design and VHDL description of multiplierless half-band IIR filter. //Int. J. Electron. Commun. (AEU). 2002. V. 56. No. 5. -P. 348-350.
6. Мингазин А.Т. Расчет полуполосных БИХ-фильтров. // Электросвязь. 1996. № 6. -С. 36-37.
7. Мингазин А.Т. Метод синтеза цифровых фильтров с коэффициентами конечной разрядности. // Электросвязь. 1983. № 7. -С. 49-53.