

СИНТЕЗ ПОЛУПОЛОСНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ БЕЗ УМНОЖИТЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ФАЗОВЫХ ЦЕПЕЙ

Мингазин А. Т.

РАДИС Лтд

Россия, Москва, Зеленоград, 124460, а/я 20

Тел./факс. (095) 535-02-70, 532-06-63, e-mail: alexmin@orc.ru

Реферат. Для синтеза полуполосных цифровых фильтров без умножителей на основе параллельного соединения двух фазовых цепей предложено использовать упрощенный алгоритм вариации исходных параметров. Приведен пример синтеза фильтра 9-го порядка. Представлен каталог из 15-ти полуполосных фильтров Золотарева-Кауэра 3-го порядка, для реализации которых требуется не более двух сумматоров, заменяющих умножители.

1. Введение. Полуполосные цифровые фильтры широко используются при интерполяции и прореживании во многих системах с цифровой обработкой сигналов. В частности на их основе строятся узкополосные фильтры, подполосные кодеки, трансмультиплексоры и другие устройства. Полуполосные фильтры без умножителей на основе параллельного соединения двух фазовых цепей, состоящих из каскада звеньев 2-го порядка, очень экономичны для реализации на заказных или полузаказных СБИС. В таких фильтрах половина коэффициентов равна нулю, а каждый коэффициент не равный нулю представлен в виде некоторой комбинации чисел равных степени два. В этом случае умножение на единственный коэффициент в звене заменяется операциями сдвига и суммирования (вычитания). На этапе синтеза фильтров важно минимизировать полное число сумматоров, заменяющих умножители [1-5]. Для этой цели в [4] применен двухэтапный алгоритм вариации исходных параметров (ВИП) и на конкретных примерах продемонстрирована его эффективность. В данной статье уточнена задача синтеза полуполосных цифровых фильтров и предложено использовать более простой в программировании ВИП алгоритм, который приводит к тем же результатам, что и алгоритм из [4].

2. Полуполосные фильтры Золотарева-Кауэра. Полуполосные цифровые фильтры на основе параллельного соединения двух фазовых цепей описываются передаточной функцией

$$H(z) = \frac{1}{2} \left(\prod_{i=1,3,\dots}^K \frac{\beta_i + z^{-2}}{1 + \beta_i z^{-2}} \pm z^{-1} \prod_{i=2,4,\dots}^K \frac{\beta_i + z^{-2}}{1 + \beta_i z^{-2}} \right), \quad (1)$$

$$K \leq (N-1)/2, \quad 0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_K < 1.$$

Здесь N-нечетный порядок фильтра, знак плюс соответствует ФНЧ, а – минус ФВЧ.

Для полуполосных фильтров Золотарева-Кауэра при фиксированном N коэффициенты в (1) являются некоторыми функциями лишь одного исходного параметра

$$\beta_i = \Psi_i(f_s), \quad (2)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, (N-1)/2,$$

где f_s -границная частота полосы задерживания, нормированная относительно частоты дискретизации.

Полуполосный фильтр 3-го порядка описывается только одним коэффициентом β_1 . Используя явное выражение для (2) из [6], можно показать, что при изменении f_s в интервале $0.25 < f_s < 0.5$ (для ФНЧ) значение β_1 монотонно изменяется в диапазоне $1 > \beta_1 > 1/3$. Любое значение коэффициента, в том числе и квантованное, из этого диапазона соответствует некоторому полуполосному фильтру Золотарева-Кауэра. Интересно, что $\beta_1 = 1/3$ определяет полуполосный фильтр Баттерворта 3-го порядка и следовательно не существует этих фильтров с квантованным коэффициентом (известно, что коэффициенты полуполосных фильтров Баттерворта зависят только от N).

3. Задача синтеза полуполосных фильтров без умножителей. Для синтеза полуполосных фильтров с передаточной функцией вида (1) достаточно контролировать лишь одну из полос – полосу задерживания или пропускания. Пусть имеет место (2), тогда задачу синтеза полуполосных фильтров без умножителей с помощью ВИП алгоритма можно сформулировать как

$$\Sigma_m(f_s) \rightarrow \min_{f_s}, \tilde{a}_0(f_s) \geq a_{0\min}, f_s \in S,$$

где \tilde{a}_0 - минимальное ослабление АЧХ фильтра в номинальной полосе задерживания; символ \sim означает соответствие квантованию коэффициентов в (2); $a_{0\min}$ - заданное допустимое ослабление; Σ_m - полное число сумматоров, заменяющих умножители; S - область возможных значений f_s , которая включает заданное номинальное значение f_{sn} .

В результате решения этой задачи получим квантованные коэффициенты, которые не будут соответствовать фильтру Золотарева-Кауэра, за исключением случая, когда $N=3$ и $1 > \beta_1 > 1/3$. Заметим, что синтез полуполосных фильтров Золотарева-Кауэра без умножителей при $N=3$ можно считать тривиальной задачей, которая может быть решена без использования (2) путем прямой подстановки “хороших” значений β_1 в (1) с последующим анализом \tilde{a}_0 .

4. Алгоритм синтеза. Решение сформулированной задачи может быть найдено с помощью двух-этапного ВИП алгоритма из [4]. Первый этап - определение начальных точек методом ветвей и границ, второй этап - локальная вариация параметра f_s . В этом алгоритме необходимо многократно решать трансцендентное уравнение. Упрощенный ВИП алгоритм, по существу подобный описанному в [7], свободен от этой процедуры и заключается в следующем: параметр f_s изменяется в области S для ряда значений шага квантования коэффициентов $q = q_{\max}, q_{\max}/2, \dots$ до тех пор пока для некоторого $q = q_0$ и $q_0/2$ не будут найдены все допустимые решения с $\tilde{a}_0 \geq a_{0\min}$. Далее из них выбирается вариант с минимальным числом Σ_m .

Заметим, что в S имеется конечное число подобластей, которым соответствуют свои векторы коэффициентов [7]. В алгоритме определяются все подобласти и оценка решения на допустимость для каждой из них выполняется только один раз. В эвристическом алгоритме [2] эти важные детали не описаны.

Результаты синтеза полуполосных фильтров из [2] и [4] могут быть воспроизведены с помощью упрощенного ВИП алгоритма. Далее обсуждается другой пример синтеза и представлен каталог полуполосных фильтров Золотарева-Кауэра 3-го порядка, который был получен путем решения (2) для ряда квантованных коэффициентов.

5. Пример. Требования к полуполосному фильтру: $a_{0\min} = 47$ дБ, $f_{sn} = 0.27$, $N=9$.

В [5] с помощью алгоритма вариации коэффициентов (ВК) найдено следующее решение $\Sigma_m=7$, $\beta_1 = 2^{-3} + 2^{-6}$, $\beta_2 = 2^{-1} - 2^{-4} - 2^{-9}$, $\beta_3 = (1 - 2^{-2})(1 - 2^{-4})$, $\beta_4 = 1 - 2^{-3} + 2^{-5}$.

Можно убедиться, что этим коэффициентам соответствует $\tilde{a}_0=45$ дБ, а не 47 дБ.

Описанный выше ВИП алгоритм приводит к ряду решений с $\tilde{a}_0 \geq 45$ дБ, два из них имеют вид
вар.1: $f_s = 0.271415$, $\Sigma_m = 8$, $\tilde{a}_0 = 47$ дБ,

$$\beta_1 = 2^{-3} + 2^{-7}, \beta_2 = 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-5} + 2^{-7}, \beta_3 = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4}, \beta_4 = (1 + 2^{-5})(1 - 2^{-3}).$$

вар.2: $f_s = 0.265030$, $\Sigma_m = 7$, $\tilde{a}_0 = 45$ дБ,

$$\beta_1 = 2^{-3} + 2^{-5}, \beta_2 = 2^{-1} - 2^{-5} + 2^{-9}, \beta_3 = (2^{-1} + 2^{-2})(1 - 2^{-6}), \beta_4 = 1 - 2^{-4} - 2^{-6}.$$

Вар.1 удовлетворяет требованию по \tilde{a}_0 , но уступает решению [5] по Σ_m на один сумматор. Вар.2 эквивалентен этому решению и имеет другие коэффициенты.

Используем коэффициенты вар.1 в качестве начальных в алгоритме ВК. Применение алгоритма приводит к следующему решению

вар.3: $\Sigma_m = 6$, $\tilde{a}_0 = 46$ дБ,

$$\beta_1 = 2^{-3}, \beta_2 = (2^{-1} - 2^{-4})(1 - 2^{-4}), \beta_3 = 2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4}, \beta_4 = (1 + 2^{-5})(1 - 2^{-3}).$$

Как видим относительно вар.1 сэкономлено два сумматора, но \tilde{a}_0 уменьшено на 1 дБ, а относительно вар.2 и решения [5] сэкономлен один сумматор и \tilde{a}_0 улучшено на 1 дБ.

Представленная в [5] структура каждого из четырех фазовых звеньев содержит 3 сумматора. Для получения выходов ФНЧ и ФВЧ требуется еще два сумматора. Поэтому полное число сумматоров в структуре фильтра $\Sigma = \Sigma_m + 3 \times 4 + 2 = 21$. Если для реализации фазовых звеньев использовать прямую форму, содержащую два сумматора, то для вар.3 получим $\Sigma = 16$.

6. Каталог полуполосных фильтров Золотарева-Кауэра 3-го порядка. В таблице представлены коэффициенты и параметры полуполосных цифровых фильтров Золотарева-Кауэра 3-го порядка.

Таблица

Фильтр	1	2	3	4	5	6	7	8
β_1	$2^{-1} + 2^{-2}$	$2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4}$	$2^{-1} + 2^{-3}$	$2^{-1} + 2^{-4}$	2^{-1}	$2^{-1} - 2^{-5}$	$2^{-1} - 2^{-4}$	$(1 - 2^{-4}) \times (2^{-1} - 2^{-4})$
$f_s = f_{sn}$	0.263822	0.271403	0.281561	0.295354	0.314677	0.327493	0.343496	0.361343
\tilde{a}_0 , дБ	11.1	13.2	15.5	18.4	22.3	24.8	28.0	31.8
$\Delta\tilde{a}$, дБ	0.35	0.22	0.12	0.063	0.026	0.014	0.0068	0.0029
$\Delta\tilde{\tau}$	5.0	3.4	2.3	1.6	1.0	0.77	0.56	0.39

продолжение таблицы

9	10	11	12	13	14	15
$(1 + 2^{-4}) \times (2^{-2} + 2^{-3})$	$(1 - 2^{-3}) \times (2^{-1} - 2^{-4})$	$2^{-2} + 2^{-3}$	$(1 - 2^{-5}) \times (2^{-1} - 2^{-3})$	$2^{-2} + 2^{-3} - 2^{-6}$	$(1 + 2^{-3}) \times (2^{-2} + 2^{-4})$	$2^{-2} + 2^{-4} + 2^{-5}$
0.370575	0.385009	0.393448	0.408312	0.414071	0.427368	0.444521
33.9	37.3	39.5	43.7	45.5	50.1	57.3
0.0018	0.0008	0.0005	0.00018	0.0001	0.00004	0.00001
0.325	0.24	0.20	0.14	0.12	0.084	0.048

Здесь $\Delta\tilde{a}$ - неравномерность АЧХ в полосе пропускания, а $\Delta\tilde{\tau}$ - неравномерность ГВЗ в отсчетах частоты дискретизации. Количество суммирований в представленных коэффициентах не превышает двух. Только для фильтра-5 умножение на коэффициент не требует сумматоров.

7. Заключение. Для синтеза полуполосных цифровых фильтров без умножителей на основе параллельного соединения двух фазовых цепей можно применить упрощенный ВИП алгоритм. Приведен пример синтеза фильтра 9-го порядка с минимальным полным числом сумматоров, заменяющих умножители. Показано, что для данного фильтра дополнительное уменьшение числа сумматоров может быть достигнуто объединением ВИП алгоритма и вариации коэффициентов. Представлен каталог из 15-ти полуполосных фильтров Золотарева-Кауэра 3-го порядка экономичных для реализации на СБИС.

Литература

1. Gulluoglu S.N., Wegener W., Gazsi L. Catalog of bireciprocal wave digital low-pass filters with discrete optimized coefficients. // IASTED. 1985. June. -P. 120-123.
2. Samueli H. A low-complexity multiplierless half-band recursive digital filter design. //IEEE Trans. 1989. ASSP-37. No. 3. -P. 442- 444.
3. Milic L. D., Lutovac M. D. Design of multiplierless elliptic IIR filters with a small quantization error. //IEEE Trans. 1999. SP-47. No. 2. -P. 469- 479.
4. Мингазин А.Т. Синтез цифровых фильтров на основе фазовых цепей с конечной длиной слова коэффициентов. //2-я международная конференция 'Цифровая обработка сигналов и ее применение'. 1999. Т. 1. -С. 112-116.
5. Lutovac B.M., Lutovac M.D. Design and VHDL description of multiplierless half-band IIR filter. //Int. J. Electron. Commun. (AEU). 2002. V. 56. No. 5. -P. 348-350.
6. Мингазин А.Т. Расчет полуполосных БИХ-фильтров. // Электросвязь. 1996. № 6. -С. 36-37.
7. Мингазин А.Т. Метод синтеза цифровых фильтров с коэффициентами конечной разрядности. // Электросвязь. 1983. № 7. -С. 49-53.