

# СИНТЕЗ КАСКАДНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ СУММАТОРОВ В БЛОКАХ УМНОЖЕНИЯ

*А.Т. Мингазин*

РАДИС Лтд.

Россия, 107005, Москва, ул. Радио, 12/2, тел. 536-83-73, факс. 267-45-39, e-mail: alexmin@orc.ru

**Реферат.** Рассматривается проблема синтеза каскадных цифровых БИХ-фильтров, оперирующих с фиксированной точкой и использующих блоки умножения. Предлагаются два подхода к синтезу, в которых задачи уменьшения длины слова коэффициентов, отношения (шум округления)/сигнал и числа сумматоров в блоках умножения решаются совместно. На конкретных примерах показано, что такое решение проблемы приводит к дополнительному снижению сложности фильтров.

## 1. Введение

Сложность цифровых фильтров, оперирующих с фиксированной точкой, можно значительно снизить путем применения техники блоков умножения [1,2]. Блок содержит элементы сдвига и сумматоры. Недавно, Демпстер и Маклеод [3] выполнили сравнение каскадных, параллельных, прямых и волновых цифровых БИХ-фильтров, использующих блоки умножения с минимальным числом сумматоров. Их исследования и полученные усредненные результаты показывают, что каскадная структура является наилучшей. Ниже внимание сосредоточено на более детальном синтезе каскадных БИХ-фильтров малой сложности, использующих блоки умножения.

Для заданных требований к фильтру в предположении, что аппроксимация, порядок, структура звеньев и  $L_p$ -норма для масштабирования выбраны, минимальное число сумматоров в блоках умножения зависит от значений квантованных коэффициентов. Последние, в свою очередь, зависят от варианта дискретного решения, длины слова коэффициентов, типа масштабных множителей, метода введения этих множителей в передаточную функцию фильтра, полюсно-нулевого объединения (например для эллиптической аппроксимации) и упорядочения звеньев фильтра. С другой стороны все это влияет на отношение (шум округления)/сигнал, которое также необходимо снижать для уменьшения длины слова данных внутри фильтра. Таким образом, синтез фильтров малой сложности представляет собой трудную задачу. Для каскадных фильтров, использующих отдельные множители, одновременное уменьшение длины слова коэффициентов и отношения шум/сигнал рассмотрено в [4]. В данной работе представлены два подхода к синтезу, в которых задачи уменьшения длины слова коэффициентов, отношения шум/сигнал и полного числа сумматоров в блоках умножения каскадных БИХ-фильтрах решаются совместно. Как будет показано на примерах такой синтез приводит к дополнительному снижению сложности фильтров.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим каскадные фильтры с  $L_p$ -масштабированием, составленные из звеньев второго порядка обращенной прямой формы I. Масштабные множители могут быть двух типов, а именно равными и не равными степеням числа два. Предположим, что множители вводятся путем изменения коэффициентов передаточной функции (исключая множитель на входе фильтра). Поэтому отмасштабированная передаточная функция с нулями на единичной окружности в  $z$ -плоскости может быть представлена как

$$H(z) = B_{00} \prod_{i=1}^K \frac{B_{0i} + B_{1i}z^{-1} + B_{2i}z^{-2}}{1 + A_{1i}z^{-1} + A_{2i}z^{-2}} = B_{00} \prod_{i=1}^K H_i(z).$$

Модуль передаточной функции  $|H(z)|$ , соответствующий квантованным коэффициентам, должен удовлетворять заданным требованиям. Определим шаг квантования как  $q=2^{-M}$ , где  $M$  длина слова мантиссы коэффициентов. Уменьшение  $M$  приводит снижению минимального числа сумматоров в блоках умножения фильтра [2,3].

Для выбранной шумовой модели отношение шум/сигнал на выходе фильтра (в дБ)

$$\text{Ш/С} = 10 \lg \left\{ \frac{1}{1,5G^2} \left[ 1 + \sum_{i=1}^K \left\| \prod_{n=1}^K H_n \right\|_2^2 \right] \right\} - 6,02b = R - 6,02b,$$

где  $G$  - максимальный коэффициент передачи фильтра,  $b$  - число бит (включая знак) сохраняемое после округления данных внутри фильтра.

Для заданного Ш/С снижение значения  $R$  на 6 дБ уменьшает значение  $b$  на один бит и в этом случае сложность фильтра уменьшается. Будем использовать  $R$  в качестве параметра Ш/С.

Полное число сумматоров в блоках умножения фильтра

$$\Sigma = \sum_{i=0}^K m_i,$$

где  $m_i$  - число сумматоров в  $i$ -ом блоке (блок с  $m_0$  выполняет только одно умножение на  $B_{00}$ ).

Цель синтеза заключается в максимально возможном уменьшении значений параметров  $M$ ,  $R$  и  $\Sigma$  при удовлетворении заданных требований к фильтру.

### 3. Два подхода к решению задачи

Рассмотрим два возможных подхода к решению поставленной задачи. Первый - соответствует масштабным множителям равным степеням числа два и заключается в поочередном уменьшении длины слова коэффициентов, полного числа сумматоров с учетом полюсно-нулевого объединения, и параметра Ш/С путем упорядочения звеньев. Очевидно, что уменьшение числа сумматоров может

быть выполнено для ряда допустимых дискретных решений. В этом случае выбирается вариант с наименьшим числом сумматоров. Второй подход соответствует масштабным множителям не равным степеням числа два. При этом (в данной постановке задачи) проблемы квантования коэффициентов числителя и масштабных множителей становятся неразделимыми [4]. Поэтому в начале применяется метод одновременного уменьшения длины слова коэффициентов и параметра Ш/С с использованием процедуры полюсно-нулевого объединения и упорядочения звеньев. Затем для ряда решений с приемлемыми параметрами Ш/С применяется техника сокращения полного числа сумматоров и выбирается вариант с минимальным числом сумматоров.

Очевидно, что для фильтров со специфическими нулями (например для фильтров Чебышева или Баттерворта с кратным нулем в точке  $z = -1$  или  $+1$ ) процедура полюсно-нулевого объединения не имеет смысла и второй подход фактически сводится к первому. Использование представленных подходов не исключает возможности компромиссного выбора параметров  $M$ ,  $R$  и  $\Sigma$ .

### 4. Примеры синтеза

Рассмотрим два примера синтеза цифровых фильтров с  $L_\infty$ -масштабированием, полученных из аналоговых эллиптических прототипов путем билинейного преобразования. Требования к этим фильтрам были использованы и другими авторами при решении задачи уменьшения длины слова коэффициентов [4]. Для проведения синтеза применим методы из [2,4,5].

#### 4.1. Пример 1

Требуется синтезировать фильтр нижних частот с неравномерностью АЧХ в полосе пропускания  $\Delta a \leq 0,174$  дБ, ослаблением АЧХ в полосе задерживания  $a_0 \geq 60$  дБ, граничными частотами  $f_1 = 0,166667$ ,  $f_2 = 0,188056$  и значением  $K=5$ . Здесь и далее  $f_j$  нормализованы относительно частоты дискретизации.

Для данного фильтра продемонстрируем эффективность первого из предложенных подходов. В этом случае масштабные множители ( $B_{0i}$ ,  $i=0-5$ ) равны степеням числа два. Целочисленная версия коэффициентов с минимальной длиной слова, полученных методом на основе вариации исходных параметров [4], имеет вид

$$(35,-11,53)(32,-17,6)(30,-24,-14)(29,-29,-22)(28,-31,-24).$$

Эта конфигурация, в которой последовательность скобок соответствует  $(-A_{1i}, -A_{2i}, B_{1i}/B_{0i})$ ,  $i=1-5$ , несет информацию о полюсно-нулевом объединении и упорядочении звеньев. Шаг квантования коэффициентов  $q=2^{-5}$  и  $M=5$ . Реальные значения коэффициентов получаются умножением

целочисленных значений на  $q$ . Заметим, что решение остается допустимым при  $V_{11}/V_{01} = 54$  или  $55$ , т.е. имеется три варианта дискретных решений. Для приведенной конфигурации применение техники сокращения числа сумматоров [2] и вычисление параметра Ш/С дает

$$\Sigma = 4+2+3+3+3 = 15 \text{ и } R = 18,7 \text{ дБ.}$$

Два других значения  $V_{11}/V_{01}$  не изменяют  $\Sigma$  и очень слабо влияют на  $R$ . Представленная конфигурация считается одной из приемлемых в эвристической процедуре объединения-упорядочения [5]. Лучшему решению, полученному с помощью этой процедуры соответствует  $R=17,4$  дБ. Изменение полюсно-нулевого объединения и применение техники [2] приводит к другому решению с минимальным числом сумматоров

$$(35,-11,-22)(32,-17,-14)(30,-24,-24)(29,-29,6)(28,-31,53), \\ \Sigma = 3+2+2+2+4 = 13, R = 27,4 \text{ дБ.}$$

Альтернативное полюсно-нулевое объединение, замена  $53$  на  $54$ , применение техники [2] и упорядочения звеньев [5] приводят к следующему результату

$$(35,-11,-22)(29,-29,6)(30,-24,54)(32,-17,-24)(28,-31,-14), \\ \Sigma = 3+2+3+2+2 = 12, R = 17,7 \text{ дБ.}$$

Здесь  $V_{00} = 8$ ,  $V_{01} = 16$ ,  $V_{02} = 8$ ,  $V_{03} = 4$ ,  $V_{04} = 16$ ,  $V_{05} = 64$ . Для данного фильтра выбор полюсно-нулевого объединения и варианта дискретного решения приводит к уменьшению числа сумматоров на 20% без ухудшения параметра Ш/С. Если применить упрощенный подход к синтезу, а именно простое округления коэффициентов минимаксного фильтра, представление их в каноническом знако-разрядном коде и первую из вышеприведенных конфигураций, то  $M=9$ ,  $\Sigma=10+8+7+8+8=41$ ,  $R=20,1$  дБ. Таким образом, предложенный подход в сравнении с упрощенным позволяет сократить число сумматоров в блоках умножения на 71% и несколько улучшить параметр Ш/С.

#### 4.2. Пример 2

Требуется синтезировать полосовой фильтр с  $\Delta a \leq 0,521$  дБ,  $a_0 \geq 40$  дБ,  $f_1 = 0,191667$ ,  $f_2 = 0,205556$ ,  $f_3 = 0,233333$ ,  $f_4 = 0,247222$ . Число звеньев  $K=4$ .

Первый подход (масштабные множители равны степеням числа два) дает

$$(18,-58,-64)(36,-62,0)(12,-62,-48)(29,-58,24), \\ M = 6, \Sigma = 3+2+2+2 = 9, R = 18,0 \text{ дБ.}$$

В этом случае  $V_{00} = 4$ ,  $V_{01} = 16$ ,  $V_{02} = V_{03} = 32$ ,  $V_{04} = 128$ . Использование вариантов дискретных решений и возможности формирования полюсно-нулевых пар приводит к уменьшению минимального числа сумматоров с 12 до 9 или на 25%.

Второй подход (масштабные множители не полагаются преднамеренно равными степеням числа два) приводит к ряду решений, два из которых имеют вид

$$(6)(18,-58,34,-25)(36,-62,19,0)(12,-62,16,7)(29,-58,119,-130), \\ M = 6, \Sigma = 1+4+3+3+4 = 15, R = 15,3 \text{ дБ;}$$

$$(2)(36,-62,17,8)(18,-58,14,-16)(29,-58,40,0)(12,-62,353,-258), \\ M = 6, \Sigma = 0+3+3+3+4 = 13, R = 23,9 \text{ дБ.}$$

Здесь последовательность скобок ( ) означает  $(V_{00})(-A_{1i}, -A_{2i}, V_{0i}, B_{1i})$ ,  $i=1-4$ . Первое решение соответствует минимуму  $R$ , а второе - минимуму  $\Sigma$ . Другие решения имеют промежуточные или большие значения этих параметров. Для получения данных результатов использовалось значительно большее число возможных полюсно-нулевых пар, чем в [5]. Очевидно, что в двух последних конфигурациях нельзя перегруппировать полюсно-нулевые пары для дополнительного уменьшения  $\Sigma$ , поскольку это приведет к нарушению  $L_\infty$ -масштабирования. Заметим, что в каждом из трех

полученных решений устранен структурный сумматор (например в третьей конфигурации, где  $B_{13}=0$ ). Для данного фильтра преимущество первого подхода перед вторым заключается в уменьшении минимального числа сумматоров на 40% и 30% в зависимости от представленных вариантов при сравнимом параметре Ш/С.

## **5. Заключение**

Для синтеза каскадных цифровых БИХ-фильтров, оперирующих с фиксированной точкой и использующих блоки умножения малой сложности требуется решение трех задач связанных с уменьшением длины слова коэффициентов, отношения (шум округления)/сигнал и числа сумматоров в блоках умножения. Предложены два подхода к совместному решению этих задач с учетом типа масштабных множителей, вариантов дискретных решений, полюсно-нулевого объединения и упорядочения звеньев. Результаты исследований показывают, что такое решение приводит к дополнительному уменьшению сложности фильтров. Рассмотренные подходы могут быть применены при разработке СБИС и САПР цифровых фильтров.

## **Библиография**

1. Bull D.R., Horrocks D.H. Primitive operator digital filters. //Proc. IEE, pt. G, 1991, v.138, , june, pp. 401-412.
2. Dempster A.G., Macleod M.D. Use of minimum-adder multiplier block in FIR digital filters. //IEEE Trans. on Circuits and Systems-II, 1995, v. 42, N 9, pp. 569-577.
3. Dempster A.G., Macleod M.D. IIR digital filter design using minimum adder multiplier blocks.//IEEE Trans.on Circuits and Systems-II, 1998, v. 45, N 6, pp. 761-763.
4. Мингазин А.Т. Синтез передаточных функций цифровых фильтров в области дискретных значений коэффициентов (обзор).// Электронная техника, Сер. 10, 1993, N 1,2, pp. 3-35.
5. Мингазин А.Т., Зорич А.А. Минимизация шума округления каскадных рекурсивных цифровых фильтров.//Электронная техника, Сер. 10, 1992, N 1,2, pp. 37-43.