УДК 621.372.54.037

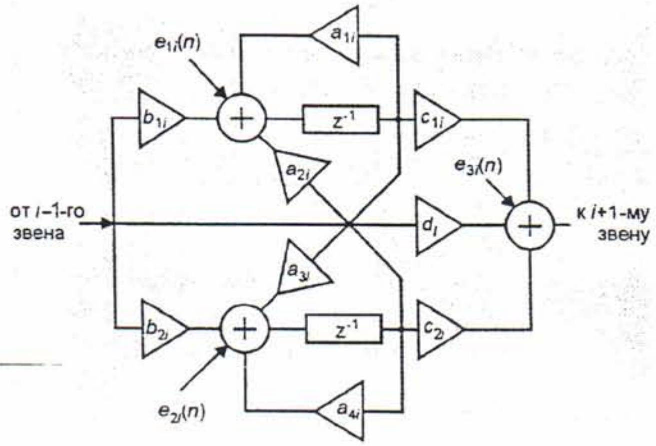
Шумы округления каскадных цифровых фильтров при их описании в пространстве состояний

А.Т. Мингазин

Получены соотношения для определения дисперсии шума округления каскадных цифровых фильтров, оперирующих с фиксированной запятой; приведен пример расчета.

Интерес к цифровым фильтрам (ЦФ) на основе их описания в пространстве состояний (ПС) вызван возможностью устранения в них колебаний переполнения при одновременном получении низкой коэффициентной чувствительности и низкого уровня шума округления [1—4]. Использование параллельных или каскадных форм ЦФ на основе ПС-структур оказывается более выгодным с точки зрения уменьшения количества умножений, приходящихся на один выходной отсчет. Так, для параллельной или каскадной реализации на звеньях 2-го порядка требуется примерно $4K$, а для прямого исполнения ПС-структуры K-го порядка $(K+1)^2$ умножений [2].

Важным моментом при проектировании ЦФ является определение уровня шума на выходе, обусловленного округлением результатов арифметических действий. Для оценки дисперсии шума округления параллельной формы достаточно уметь находить лишь дисперсию для ПС-структуры 2-го порядка. В случае каскадной реализации, которая предпочтительнее параллельной из-за отсутствия многовходового сумматора на выходе, проблема значительно усложняется. Публикации, в которых представлены удобные соотношения для непосредственной оценки дисперсии шума округления каскадных ЦФ произвольного порядка на основе ПС-структур, отсутствуют или возможно мало доступны. Ц е л ь р а б о т ы — *получить эти соотношения.*



Воспользуемся хорошо известной вероятностной моделью округления чисел с фиксированной запятой в линейном ЦФ [5]. На рисунке приведена шумовая модель ПС-структуры 2-го порядка, которую будем использовать в каждом звене N -каскадного ЦФ. Здесь $a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, a_{4i}, b_{1i}, b_{2i}, c_{1i}, c_{2i}, d_i$ — коэффициенты i-го звена, а $e_{1i}(n)$, $e_{2i}(n)$ и $e_{3i}(n)$ —некоррелированные с входным сигналом, между собой и от отсчета к отсчету шумы округления с равномерным распределением и дисперсией σ_0^2 каждый.

Представим передаточную функцию каскадного ЦФ в виде

$$H(z)=\prod_{i=1}^{N}\frac{B_{0i}+B_{1i}z^{-1}+B_{2i}z^{-2}}{1+A_{1i}z^{-1}+A_{2i}z^{-2}}=\prod_{i=1}^{N}\frac{B_i(z)}{A_i(z)}=\prod_{i=1}^{N}H_i(z).$$

Коэффициенты $H_i(z)$ связаны с коэффициентами ПС-структуры следующими соотношениями [4]:

$$A_{1i}=-a_{1i}-a_{4i},\ A_{2i}=a_{1i}a_{4i}-a_{2i}a_{3i},$$

$$B_{0i}=d_i,\ B_{1i}=c_{1i}b_{1i}+c_{2i}b_{2i}+A_{1i}d_i,$$

$$B_{2i}=c_{1i}b_{2i}a_{2i}+c_{2i}b_{1i}a_{3i}-c_{1i}b_{1i}a_{4i}-c_{2i}b_{2i}a_{1i}+A_{2i}d_i.$$

Заметим, что для ПС-структуры 1-го порядка $a_{2i}=a_{3i}=a_{4i}=b_{2i}=c_{2i}=0$ и, следовательно, $A_{2i}=B_{2i}=0$.

Дисперсии шума на выходе N-каскадного ЦФ, соответствующие всем составляющим источников шума $e_{1i}(n)$, $e_{2i}(n)$ и $e_{3i}(n)$ $(i=1,2,\dots,N)$ обозначим как σ_1^2, σ_2^2 и σ_3^2. Тогда результирующая дисперсия шума округления на выходе ЦФ $\sigma^2=\sum_{\nu=1}^{3}\sigma_\nu^2$.

Нетрудно показать, что любая ν-составляющая дисперсии вычисляется по следующему соотношению:

$$\sigma_\nu^2=\sigma_0^2\left\{m+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\times\right.$$

$$\times\sum_{i=1}^{N-m}\oint_{|z|=1}\prod_{k=i+m}^{N}\frac{D_k(z)D_k(z^{-1})}{A_k(z)A_k(z^{-1})}\frac{dz}{z}\Big\}, \qquad (1)$$

где

$$D_k(z)=\begin{cases} c_{1k}z^{-1}+(a_{3k}c_{2k}-a_{4k}c_{1k})z^{-2}, & k=i,\nu=1,\\ c_{2i}z^{-1}+(a_{2k}c_{1k}-a_{1k}c_{2k})z^{-2}, & k=i,\ \nu=2,\\ B_k(z) \quad \text{в остальных} & \text{случаях} \ ; \end{cases}$$

$$m=\begin{cases}0, & \nu<3,\\ 1, & \nu=3;\end{cases} \quad \nu=1,2,3.$$

Положим теперь, что подынтегральная функция в (1) не имеет кратных полюсов. Тогда, пользуясь методом вычетов и опуская промежуточные преобразования, (1) запишем в окончательном виде

$$\sigma_\nu^2=\sigma_0^2\Big\{m+\sum_{i=1}^{N-m}\Big[\sum_{n=i+m}^{N}(Q_nR_n+\widehat{R}_n)+\prod_{k=i+1}^{N}G_k\Big]\Big\}, \qquad (2)$$

где

$$R_n=\mathrm{Re}\left[z_n^{-1}\prod_{k=i+m}^{N}\frac{D_k(z_n)D_k(z_n^{-1})}{S_k(z_n)A_k(z_n^{-1})}\right],$$

$$S_k(z_n)=\begin{cases} A_k(z_n), & k\neq n,\\ z_n^{-1}-z_n^{*}z_n^{-2}, & k=n, u_n<0,\\ 2z_n^{-1}+A_{1n}z_n^{-2}, & k=n,\ u_n>0, A_{2n}\neq 0,\\ z_n^{-1}, & k=n, A_{2n}=0; \end{cases}$$

z_n, z_n^* — комплексно-сопряженные полюсы,

$$z_n=\begin{cases} -A_{1n}/2+i\sqrt{-u_n}, & u_n<0,\\ -A_{1n}/2\pm\sqrt{u_n}, & u_n>0, A_{2n}\neq 0,\\ -A_{1n}, & A_{2n}=0; \end{cases}$$

$$Q_n=\begin{cases}2, & u_n<0,\\ 1, & u_n>0;\end{cases} \qquad u_n=A_{1n}^2/4-A_{2n};$$

$$G_k=\begin{cases} B_{0k}B_{2k}/A_{2k}, & \nu=3,\ A_{2k}\neq 0,\\ B_{0k}B_{1k}/A_{1k}, & \nu=3, A_{2k}=0,\\ 0, & \nu<3. \end{cases}$$

Значение $\widehat{R}_n\neq 0$ при $u_n>0$, $A_{2n}\neq 0$ и вычисляется по той же формуле, что и R_n. В этом случае при определении z_n знак плюс соответствует R_n, а минус $-\widehat{R}_n$.

Выражение (2) сходно по форме записи с выражением для дисперсии шума округления каскадных ЦФ на звеньях 2-го порядка прямой или канонической структуры [6]. В отличие от представления в [6] функции, входящие в соотношение для R_n, даны в комплексном виде. Это значительно упрощает запись, а наличие комплексного типа данных в современных языках программирования облегчает написание компактной программы.

Определим дисперсию шума на выходе ЦФ 6-го порядка, заданного следующими коэффициентами (индекс номера звена опущен):

для 1-го звена

a_1=0,988093,	a_2=0,101937,
a_3=-0,113989,	a_4 = 0,988093,
b_1= 0,023048,	b_2 = 0,020667,
c_1= 1,519254,	c_2= 1,694296

для 2-го звена

a_1= 0,989214,	a_2=0,123988,
a_3=-0,123437,	a_4 = 0,989214,
b_1= 0,000659,	b_2 = 0,022147,
c_1= 0,151362,	c_2 = 0,004503,

для 3-го звена

a_1= 0,993130,	a_2= 0,094558,
a_3=-0,094980,	a_4= 0,993130,
b_1= 0,002023,	b_2 = 0,019329,
c_1=-0,075146,	c_2=-0,007887.

Для всех звеньев d=0,035437. Расчет дисперсии приводит к значению $\sigma^2=2{,}321\cdot\sigma_0^2$. По полученным соотношениям были определены дисперсии и для других ЦФ. В частности, найденные значения совпадают с представленными в [2] для двух рассмотренных в ней ЦФ. При проведении расчетов, как и в [2], не учитывалась третья составляющая дисперсии шума округления σ_3^2. Кроме того, была обнаружена неточность в данных для одного из ЦФ, а именно в матрицах (73) из [2, с.900] два элемента второй А-матрицы должны быть равны – 0,0425 и 0,0425, а не – 0,0246 и 0,0246.

На практике возможны ситуации появления кратных полюсов у подынтегральной функции (1). Например [6], это может происходить в результате квантования коэффициентов, когда комплексно-сопряженный полюс передаточной функции "преобразуется" в один действительный двукратный полюс, когда происходит "слияние" двух полюсов в один двукратный и т.д. В случае кратных полюсов при раскрытии интеграла требуется взятие производных высших порядков для определения вычетов. Порядок связан со степенью кратности. Необходимые преобразования (1) становятся очень громоздкими. Обойти эту трудность можно путем преднамеренного введения погрешностей в значения полюсов передаточной функции, устраняющего кратность [6]. Для каскадных ЦФ на звеньях прямой или канонической формы, точность вычисления оказывается достаточно высокой. Это подтверждается и для обсуждаемых здесь каскадных ЦФ на основе ПС-звеньев.

- Полученные соотношения для дисперсии шума округления можно применять на практике независимо от степени кратности полюсов, используя в случае кратности преднамеренное введение погрешностей.

Литература

1. *Jackson L.B., Lindgren A.G., Kim Y.* — IEEE Trans,. 1979, v. CAS-26, №3.
2. *Mills W.L., ~~Mullis C.T., Roberts R.B.~~* — IEEE Trans., 1981, v. ASSP-29, №4.
3. *Barnes C.W.* — IEEE Trans., 1985, v. CAS-32, №6.
4. *Bomar B.W.* — IEEE Trans., 1989, v. CAS-36, №4.
5. *Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н.* Цифровая обработка сигналов: Справочник. — М.:Радио и связь, 1985.
6. *Мингазин А.Т.* — Электронная техника. Сер.10, 1991, №2.

Поступила 26 мая 1995 г.

Вячеслав Сергеевич Выговский

(К 75-летию со дня рождения)

В этом году исполнилось 75 лет Вячеславу Сергеевичу Выговскому — участнику Великой Отечественной войны, заслуженному машиностроителю Российской Федерации, лауреату премии Совета Министров СССР и Государственной премии СССР.

В.С.Выговский свою трудовую деятельность начал на крупнейших машиностроительных заводах России, где за 17 лет прошел путь от старшего инженера до заместителя директора завода. Вячеслав Сергеевич принимал непосредственное участие в создании и оснащении уникальных производств, технологическом воплощении конструкторских решений и программ при создании ракетно-космических комплексов, имеющих приоритетное значение.

Работая заместителем начальника КБ химического машиностроения им. А.М.Исаева, он внес большой личный вклад в разработку и создание серии новых жидкостных ракетных двигателей для обороноспособности страны и освоения космического пространства.

С 1973 по 1991 гг. Вячеслав Сергеевич работал начальником Управления в аппарате Министерства общего машиностроения СССР, а с 1993 г. начальником Управления РКА. Высокий профессионализм, умение видеть перспективу, способность находить оптимальные пути в решении задач, стоящих перед отраслью, — вот черты, характеризующие Вячеслава Сергеевича.

В своей деятельности он тесно был связан с выдающимися учеными — генеральными и главными конструкторами Янгелем М.К., Уткиным В.Ф., Исаевым А.М., Пилюгиным А.Н., Челомеем В.Н., Кузнецовым В.И., Глушко В.П., Сергеевым В.Г., Конопатовым А.Д., Губановым Б.И. и др., директорами НИИ и заводов Мозжориным Ю.А., Сулимовым О.А., Гусевым Л.И., Топчием Д.Г., Нестеровым М.Г., Гупаловым В.К., Макаровым А.М., Киселевым А.И., Лихушиным В.Я., Афанасьевым С.А., Баклановым О.Д., Зубовым А.П., Строгановым Б.А. и др.

Своей многолетней плодотворной деятельностью Вячеслав Сергеевич внес значительный вклад в развитие отечественной ракетно-космической техники.

Коллектив Российского Космического Агентства сердечно поздравляет Вячеслава Сергеевича с юбилеем, желает крепкого здоровья, личного счастья и долгих, долгих лет плодотворной деятельности.

От коллектива РКА
Генеральный директор
Ю.Н.Коптев
Ученый секретарь А.В. Гориш