

## МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫЕ БИХ-ФИЛЬТРЫ С МИНИМАЛЬНОЙ НЕРАВНОМЕРНОСТЬЮ ХГВЗ И ТРЕБУЕМОЙ АЧХ

к. т. н. Мингазин А.Т.

РАДИС Лтд, Россия, Москва, Зеленоград, 124460, а/я 20.  
Тел./факс: 8-499-735-35-13, e-mail: [alexmin@radis.ru](mailto:alexmin@radis.ru)

Для минимизации неравномерности ХГВЗ в полосе пропускания каскадных минимально-фазовых БИХ-фильтров предлагается использовать сочетание оптимизации исходных параметров АЧХ и коэффициентов передаточной функции. Так, в качестве начальных выбираются фильтры Золотарева-Кауэра, рассчитанные для ряда благоприятных точек области допустимых исходных параметров АЧХ, включая точку, соответствующую минимальной неравномерности ХГВЗ, а оптимизация коэффициентов выполняется на основе простых градиентных алгоритмов. Из всех решений найденных для точек области, выбирается наилучшее. Численные результаты показывают, что оптимизированные минимально-фазовые фильтры могут иметь значительно меньшие неравномерности ХГВЗ, чем фильтры Золотарева-Кауэра с минимальной неравномерностью ХГВЗ.

DSPA, 2014, V.1, March, pp. 147-151

## MINIMUM-PHASE IIR FILTERS WITH MINIMUM GROUP-DELAY RIPPLE AND PRESCRIBED MAGNITUDE RESPONSE

Mingazin A.

RADIS Ltd, Russia, Moscow, Zelenograd, 124460, POB 20.  
Tel/Fax: 8-499-735-35-13, e-mail: [alexmin@radis.ru](mailto:alexmin@radis.ru)

An approach to minimization of group-delay ripple for minimum-phase IIR filters is researched. It is based on optimization of initial parameters and cascade filter coefficients. Starting filters are Zolotarev-Cauer filters which for some favorable points in a tolerable initial parameter space are calculated. The points include the one that corresponds to the minimum group delay ripple of the filter. The simple gradient algorithms for the coefficient optimization are used. The best solution between that found for points of the space is selected.

In particular, it is shown that for the minimum-phase low-pass 6-th order IIR filter the obtained group-delay ripple is more than in 15 times less in comparison to the value for Zolotarev-Cauer filter with minimum group-delay ripple. However, at other magnitude response requirements the optimization for different filter orders does not give positive results. The reason can be stipulated an unsuccessful choice of the starting filters and/or algorithms or general impossibility to reduce minimum group-delay ripple of Zolotarev-Cauer filters.

**Введение.** Известно, что нули передаточной функции минимально-фазовых цифровых БИХ-фильтров находятся внутри единичной окружности комплексной  $z$ -плоскости. Классические БИХ-фильтры полученные на основе билинейного преобразования аналоговых прототипов, таких как фильтры Золотарева-Кауэра, Баттерворта, и др. имеют нули на единичной окружности и, согласно [1] не являются минимально-фазовыми, но обладают рядом их свойств. Поэтому далее будем называть эти БИХ-фильтры, как и в некоторых других публикациях, минимально-фазовыми.

Известно также, что БИХ-фильтры часто оказываются непригодными из-за свойственной им большой неравномерности ХГВЗ в полосе пропускания. Из ряда существующих способов уменьшения этой неравномерности выделим следующие:

- Коррекция ХГВЗ фильтра с приемлемой АЧХ оптимизированной фазовой цепью.
- Минимизация неравномерности ХГВЗ полюсного БИХ-фильтра с последующей коррекцией АЧХ оптимизированным КИХ-фильтром с линейной ФЧХ.
- Минимизация неравномерности ХГВЗ БИХ-фильтра при заданных допусках на отклонение АЧХ.
- Оптимизация исходных параметров АЧХ классических БИХ-фильтров для получения минимальной неравномерности ХГВЗ.

Первый способ может приводить к завышенному результирующему порядку фильтра, второй [2] - позволяет получить экстремально малые неравномерности ХГВЗ в сравнении с первым способом (особенно для узкополосных фильтров), третий [3] - дает экстремально малые неравномерности ХГВЗ в сравнении с первым и некоторыми другими конкурирующими методами, четвертый [4] - не всегда приводит к ожидаемым результатам. Все эти способы получения приемлемых АЧХ и ХГВЗ отличаются степенью сложности и за исключением четвертого, которому свойственно отмеченное ограничение, приводят к неминимально-фазовым фильтрам, которым характерна переходная характеристика с длительным временем нарастания, что нежелательно в ряде приложений, например, в измерительной технике и некоторых системах телекоммуникации и связи [5].

В данной статье для минимизации неравномерности ХГВЗ в полосе пропускания каскадных минимально-фазовых БИХ-фильтров используется подход, основанный на объединении оптимизации исходных параметров АЧХ (четвертый способ) и оптимизации коэффициентов фильтра. Косвенным подтверждением потенциальной возможности такого подхода послужили следующие наблюдения. Так, в [4] обнаружено, что при достаточно грубом квантовании коэффициентов каскадных БИХ-фильтров Золотарева-Кауэра неравномерность их ХГВЗ может уменьшиться более чем в 1,5 или 2 раза, причем в сравнении с минимальной неравномерностью ХГВЗ этих фильтров. При этом фильтры с квантованными коэффициентами остаются минимально-фазовыми, а их АЧХ не выходят за пределы заданных допусков.

Далее, мы сформулируем задачу оптимизации, кратко представим используемые нами алгоритмы ее решения, а затем приведем конкретные результаты.

**Постановка задачи.** Передаточную функцию каскадного БИХ-фильтра нижних частот N-ого порядка запишем в виде

$$H(z) = \prod_{i=1}^K \frac{1 + B_{1i}z^{-1} + B_{2i}z^{-2}}{1 + A_{1i}z^{-1} + A_{2i}z^{-2}}, \quad (1)$$

где  $K=N/2$  и  $K=(N+1)/2$ , соответственно для четных и нечетных  $N$ , коэффициенты  $B_{2i} = A_{2i} = 1$  при четном  $N$  и коэффициенты  $B_{2i} = A_{2i} = 1$  для всех  $i \neq m$ ,  $A_{2m} = B_{2m} = 0$ ,  $B_{1m} = 1$  при нечетном  $N$ .

Масштабирование  $H(z)$ , очень важное при реализации фильтров, для нашей цели не понадобится. Требования к параметрам АЧХ фильтра зададим как

$$\Delta a \leq \Delta a_{\max}, \quad a_0 \geq a_{0\min}, \quad (2)$$

где  $\Delta a$  - неравномерность АЧХ в номинальной полосе пропускания  $0 \leq f \leq f_{1n}$ ,  $a_0$  - минимальное относительное ослабление АЧХ в полосе задерживания  $f_{2n} \leq f \leq 0,5$ . Частоты этих полос нормированы относительно частоты дискретизации. Правые части неравенств в (2) соответствуют заданным допускам. Параметры АЧХ выражены в децибелах.

Существует определенная область допустимых исходных параметров (ДИП) АЧХ фильтров Золотарева-Кауэра [4]. Расчет для любой точки этой области приводит к фильтру удовлетворяющему (2). В области ДИП находится и особенная точка, соответствующая минимуму неравномерности ХГВЗ фильтров Золотарева-Кауэра. Мы попытаемся улучшить этот минимум, оптимизируя коэффициенты знаменателей в (1), рассчитанные для ряда благоприятных точек области ДИП, включая особенную точку.

Задачу минимизации неравномерности ХГВЗ для БИХ-фильтров с передаточной функцией (1) сформулируем как

$$\begin{aligned} \Delta\tau(\mathbf{C}) &= \tau_{\max}(\mathbf{C}) - \tau_{\min}(\mathbf{C}) \rightarrow \min, \\ \Delta a(\mathbf{C}) &\leq \Delta a_{\max}, a_0(\mathbf{C}) \geq a_{0\min}, \\ a_{0t}(\mathbf{C}) &\geq 0, \mathbf{C} \in U, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$  – максимальное и минимальное значения ХГВЗ в полосе пропускания,  $\Delta\tau$  – неравномерность ХГВЗ,  $a_{0t}$  – относительное ослабление АЧХ в переходной полосе,  $\mathbf{C}$  – вектор искомых коэффициентов знаменателей в (1),  $U$  – область устойчивости.

Ограничение на  $a_{0t}$  не допускает выброса АЧХ в переходной полосе [3]. Оценки параметров частотных характеристик выполним на заданной сетке частот (500 точек).

**Алгоритмы.** Сформулированную задачу (3) можно решать теми или иными алгоритмами нелинейного программирования при наличии ограничений. Однако здесь мы применим два хорошо известных алгоритма безусловной оптимизации, а именно градиентный поиск и сопряженных направлений Флетчера – Ривса. Решение поставленной задачи этими простыми алгоритмами сильно зависит от выбранного начального приближения, т.е. в нашем случае от исходного фильтра. Используем ряд исходных фильтров Золотарева-Кауэра рассчитанных для точек области ДИП, располагающихся в  $\Delta$ -окрестности кривой ВД [4], где  $a_{0\min} \leq a_0 \leq a_{0\min} + \Delta$ ,  $f_2 = f_{2n}$ . Кривая ВД, для которой  $a_0 = a_{0\min}$ , включает вышеупомянутую особенную точку. Из всех решений найденных для исходных фильтров в алгоритмах выбирается наилучшее.

**Результаты.** Приведем результаты решения задачи (3) для двух примеров с требованиями к АЧХ из [4] и [6].

**Пример 1.** Требования к АЧХ [4]:  $\Delta a_{\max} = 3$  дБ,  $a_{0\min} = 45$  дБ,  $f_{1n} = 0,1$  и  $f_{2n} = 0,2$ . Этим параметрам удовлетворяет фильтр Золотарева-Кауэра минимального порядка  $N=4$ . В таблице 1 приведены неравномерности и максимальные значения ХГВЗ в полосе пропускания фильтров Золотарева-Кауэра полученные в [4] при  $N=4, 5, 6$  и  $7$  для особенных точек области ДИП соответствующих минимуму неравномерности ХГВЗ. Эти точки располагаются на упомянутой выше кривой ВД при  $\Delta a < \Delta a_{\max}$ ,  $f_1 < f_{1\max}$ ,  $f_2 = f_{2n}$ . Здесь  $f_{1\max}$  – максимальная частота полосы пропускания, для которой неравенства (2) обращаются в равенства.

Таблица 1. Параметры ХГВЗ БИХ-фильтров

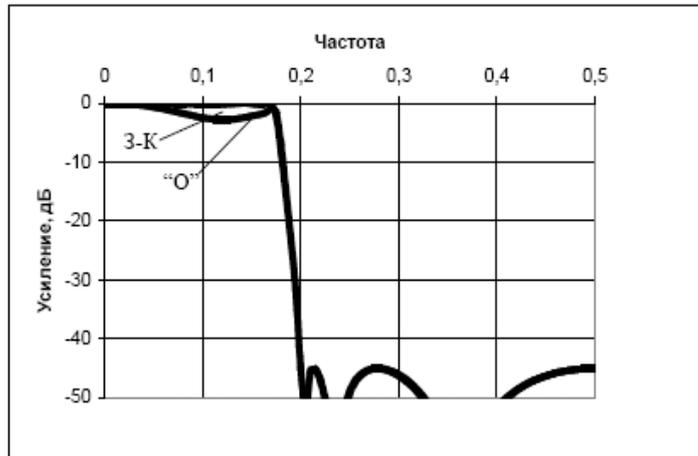
N	Фильтры Золотарева-Кауэра		Оптимизированные фильтры	
	$\Delta\tau$	$\tau_{\max}$	$\Delta\tau$	$\tau_{\max}$
4	1,80	4,45	0,468	3,91
5	1,49	3,78	0,315	3,83
6	1,21	3,86	0,0789	3,25
7	0,91	3,28	0,0746	3,42

В таблице 1 даны также параметры оптимизированных фильтров, найденных с помощью алгоритма градиентного поиска, который оказался предпочтительнее алгоритма Флетчера – Ривса для всех  $N$ . Параметры ХГВЗ представлены в отчетах частоты дискретизации. Как видим, оптимизация приводит к существенному уменьшению  $\Delta\tau$  в сравнении со значениями, рассчитанными для фильтров Золотарева-Кауэра с минимальной неравномерностью ХГВЗ. Максимальное уменьшение неравномерности ХГВЗ получено при  $N=6$  и достигает более 15 раз. Мы также наблюдаем, что максимальные значения ХГВЗ  $\tau_{\max}$  для найденных решений мало отличаются (причем в большую или меньшую сторону) от полученных для фильтров Золотарева-Кауэра. Коэффициенты оптимизированного минимально-фазового фильтра для  $N=6$  приведены в таблице 2.

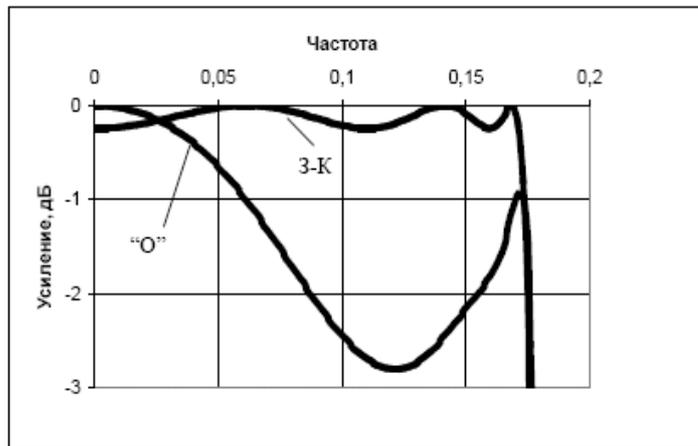
Таблица 2. Коэффициенты БИХ-фильтра

$i$	$A_{1i}$	$A_{2i}$	$B_{1i}$	$B_{2i}$
1	-0,86328743	0,92474421	-0,58435120	1
2	-0,88674211	0,70177197	-0,20228016	1
3	-1,10001088	0,34085920	1,29895159	1

На рис. 1 показаны нормированные АЧХ, а на рис. 2 приведены ХГВЗ фильтров Золотарева-Кауэра (З-К) и оптимизированных фильтров ("О"). Эти характеристики согласуются с данными таблицы 1 для  $N=6$ .



а



б

Рис. 1. АЧХ фильтров а) в основной полосе и б) в номинальной полосе пропускания и переходной полосе

В полосе задерживания АЧХ фильтров на рис. 1а практически совпадают и не превышают заданного уровня  $-45$  дБ (т.е.  $a_0 \geq 45$  дБ). В полосе пропускания на рис. 1б неравномерность АЧХ оптимизированного фильтра много больше, чем у фильтра Золотарева-Кауэра, но не превышает заданного уровня 3 дБ. Для обоих фильтров полоса по этому уровню сильно расширена в сравнении с номинальной полосой 0,1. Для оптимизированных неминимально-фазовых фильтров, рассмотренных в [3], наблюдается подобная картина.

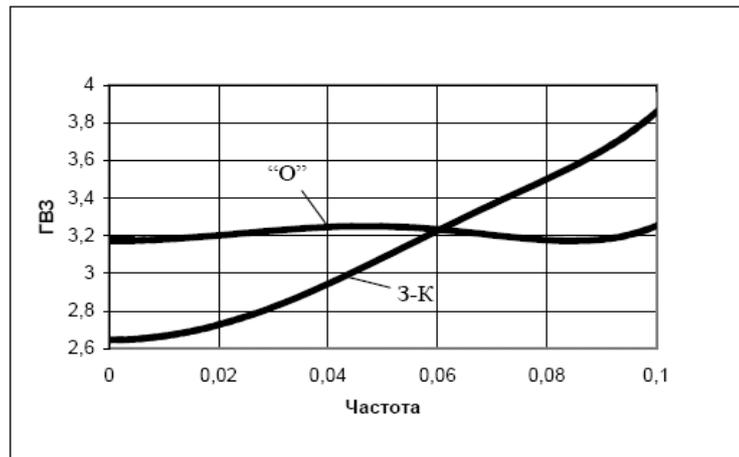


Рис.2. ХГВЗ фильтров в полосе пропускания

На рис.1б видно, что выброс нормированного усиления в переходной полосе (0,1-0,2) не превышает 0 дБ, или иначе, согласно (3), относительное ослабление АЧХ в переходной полосе  $a_{0t} > 0$ дБ. Было замечено, что также как и для неминимально-фазовых БИХ-фильтров [3] дальнейшее уменьшение неравномерности ХГВЗ сопровождается ростом этого выброса.

**Пример 2.** Требования к АЧХ [6]:  $\Delta a_{\max} = 0,5$  дБ,  $a_{0\min} = 32$ дБ,  $f_{1n} = 0,25$  и  $f_{2n} = 0,3$ . Попытки решения задачи (3) для  $N=4, 5, \dots, 12$  не дали ожидаемого эффекта, т.е. нам не удалось уменьшить минимальные неравномерности ХГВЗ фильтров Золотарева-Кауэра. Эти неравномерности соответствуют точкам D в области ДИП с координатами  $\Delta a = \Delta a_{\max}$ ,  $f_1 = f_{1\max}$ ,  $f_2 = f_{2n}$ , а не точкам на кривой BD как в примере 1. Является ли такое различие или неудачный выбор начальных приближений и/или алгоритмов оптимизации причиной отрицательного эффекта предостит выяснить в дальнейшем.

Заметим, что этот пример был рассмотрен во многих публикациях и в частности в [3], где при  $N=12$  были получены варианты решений с рекордно малой неравномерностью ХГВЗ, но лишь для неминимально-фазовых фильтров.

**Заключение.** Сочетание оптимизации исходных параметров АЧХ и коэффициентов позволяет минимизировать неравномерности ХГВЗ в полосе пропускания каскадных минимально-фазовых БИХ-фильтров. В частности, показано, что для фильтра 4-го порядка неравномерность ХГВЗ можно уменьшить примерно в 4 раза, а для фильтра 6-го порядка - более чем в 15 раз в сравнении с фильтрами Золотарева-Кауэра с минимальной неравномерностью ХГВЗ. Однако при более жестких требованиях к переходной полосе и расширенной полосе пропускания оптимизация, выполненная для разных порядков фильтра, не приводит к положительным результатам. Возможно, что применение других начальных приближений и/или алгоритмов нелинейного программирования, эффективно оперирующих при наличии ограничений, позволит решить эту проблему, а если нет, то рассмотренный нами подход имеет ограниченное применение.

#### Литература

1. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера. 2012. 1046 с.
2. Saramaki T., Neuvo Y. Digital filters with equiripple magnitude and group delay. IEEE Trans. 1984. ASSP-32. No. 6. P. 1194-1200.
3. Nongpiur R.C., Shpak D.J., Antoniou A. Improved design method for nearly linear-phase IIR filters using constrained optimization. IEEE Trans. on Signal Processing. 2013. V.61. No.4. P. 895-906.
4. Мингазин А. Резервы классических аппроксимаций цифровых БИХ-фильтров. Современная электроника. 2012. № 9. С. 62-71.
5. Пупалайкис П. Д. Групповая задержка и ее влияние на тестирование потоков последовательных данных. Компоненты и технологии. 2007. № 1. С.150-157.
6. Deczky A.G. Synthesis of recursive digital filters using the minimum p-error criterion. IEEE Trans. 1972. AU-20. No. 4. P.257-263.