

Длина слова переменных в каскадных БИХ-фильтрах

Александр Мингазин (Москва)

В статье рассматриваются каскадные цифровые БИХ-фильтры на базе звеньев 2-го порядка прямой формы, оперирующие с фиксированной точкой. Округление в фильтрах выполняется как внутри звеньев, так и между ними, что даёт возможность выбрать неидентичными длины слов переменных в цепях прямой и обратной связи. Представлены варианты определения длины слова, основанные на вероятностной, детерминированной и фактической оценке ошибки, обусловленной округлениями. Для этих вариантов на конкретных примерах показано, как сильно отличаются длины слов в цепях прямой и обратной связи, какое упрощение даёт введение округления между звеньями и на сколько необходимо увеличить длину слова в цепях обратной связи, если требуется устранить предельные циклы на выходе фильтра при нулевом входе.

ВВЕДЕНИЕ

В процессе проектирования цифровых БИХ-фильтров важной задачей является определение длины слова переменных. Решение этой задачи позволяет в свою очередь определить, какая из альтернативных структур фильтров, обладая желаемыми свойствами, наиболее экономична в плане реализации, а также оценить для конкретного проекта пригодность имеющихся в распоряжении сигнальных процессоров, микроконтроллеров, ПЛИС или других вычислителей.

Существует многообразие структур цифровых БИХ-фильтров, отличающихся степенью сложности, чувствительностью к коэффициентам, шумовыми свойствами, проявлением предельных циклов и др. Наиболее популярными являются каскадные структуры на основе звеньев не выше 2-го порядка. При этом сами звенья выполняются, как правило, по прямой или канонической форме или являются их обращёнными версиями. Широкое применение таких фильтров обусловлено тем, что они просты по своей структуре, более других изучены и описаны во многих публикациях,

в том числе в учебниках и практических руководствах, кроме того, для их расчёта разработаны программные средства.

Данная статья посвящена проблеме определения длины слова переменных в каскадных БИХ-фильтрах на звеньях прямой формы, оперирующих с фиксированной точкой, причём округление переменных выполняется как внутри звеньев, так и между ними. Представленные ниже способы определения длины слова, которые основаны на вероятностной, детерминированной и фактической оценке ошибки, обусловленной округлениями, могут быть развиты для каскадных фильтров на звеньях других форм.

В каскадных фильтрах округление обычно выполняется внутри звеньев, что приводит к идентичным значениям длины слова переменных в цепях прямой и обратной связи, за исключением, может быть, первого звена. Введение более грубого, но допустимого округления между звеньями даёт возможность исключить эту идентичность, позволяя уменьшить длину слова в цепях прямой связи, что оправдано

в случае реализации фильтров на заказных или полужаказных СБИС. Однако в литературе этот приём не описан.

Другая мотивация выполнения округления между звеньями обусловлена желанием полного устранения предельных циклов на выходе фильтра при нулевом входе, что требуется при обработке сигналов с прерываниями, когда в паузах недопустимы какие-либо посторонние сигналы. Устранение предельных циклов на выходе БИХ-фильтра произвольной структуры может быть выполнено путём более грубого реквантования на выходе, если известна максимальная амплитуда предельного цикла [1]. Введение округления между звеньями каскадного фильтра реализует этот подход и даёт возможность избавиться от предельных циклов на выходе фильтра при нулевом входе, если известны максимальные амплитуды ошибки на выходе отдельных звеньев при нулевом сигнале на их входе.

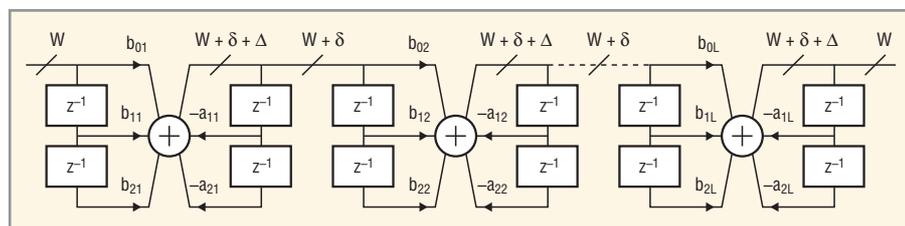
ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ, СТРУКТУРА И АРИФМЕТИКА КАСКАДНОГО БИХ-ФИЛЬТРА

Передаточную функцию каскадного БИХ-фильтра представим в виде:

$$H(z) = \prod_{i=1}^L H_i(z) = \prod_{i=1}^L \frac{b_{0i} + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2}}{1 + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2}}, \quad (1)$$

где $L = N/2$, N – чётный порядок фильтра. Соответствующая структура фильтра на основе звеньев 2-го порядка прямой формы представлена на рисунке.

Предполагается, что фильтр оперирует с фиксированной точкой в дополнительном коде, абсолютная величина переменных меньше единицы и на входе/выходе фильтра сигнал округляется до заданной длины слова W бит, включая знак. Кроме того, в каждом звене на последнем этапе суммирования осуществляется округление результата до $W + \delta + \Delta$ бит, а между звеньями – до $W + \delta$ бит (см. рисунок). Предполагается также, что последний этап суммирования выполняется с насыщением. Это,



Структура каскадного БИХ-фильтра на звеньях прямой формы

как известно, гарантирует отсутствие колебаний переполнения в рассматриваемых звеньях при нулевом сигнале на их входе и любых значениях переменных в обратных связях.

Дополнительная длина слова переменных $\delta + \Delta$ необходима для поглощения ошибок, обусловленных округлениями внутри звеньев. Эти $\delta + \Delta$ бит иногда называют «грязными», поскольку они содержат ошибку и поэтому могут быть впоследствии отброшены. Здесь предлагается вначале отбрасывать Δ бит путём округления между звеньями. Это упрощает реализацию фильтра и при правильном выборе Δ позволяет устранить предельные циклы на выходе при нулевом входе, но увеличивает ошибку на выходе при ненулевом входе. Дополнительная длина слова δ позволяет компенсировать увеличение ошибки. На выходе фильтра δ бит также отбрасываются. Следует отметить, что введение округления между звеньями связано с определёнными затратами на его реализацию и, кроме того, может потребовать увеличения точности суммирования внутри звеньев, но, как нетрудно показать, не более чем на 1 бит.

ВАРИАНТЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ СЛОВА ПЕРЕМЕННЫХ

Итак, необходимо определить длины слов $W + \delta$ и $W + \delta + \Delta$ соответственно для переменных в цепях прямой и обратной связи структуры фильтра, представленного на рисунке, а фактически – параметры Δ и δ , поскольку W задано. Упомянутые выше методы оценки ошибки на выходе фильтра, обусловленной округлениями, приводят к различным вариантам определения параметров Δ и δ , отличающимся степенью сложности, вычислительными затратами и результатами.

Оценки ошибки на основе вероятностного и детерминированного методов мы используем при нахождении пары параметров Δ , δ . Для этого положим, что уровень ошибки на выходе фильтра, связанной с округлениями на его входе и выходе, возрастает из-за округлений внутри фильтра не более чем на 3 дБ [2]. При желании это значение можно уменьшить.

Прямое моделирование применим для каждого звена по отдельности с целью нахождения фактической максимальной амплитуды ошибки на его выходе при нулевом входе. Значение этой амплитуды используем для опре-

деления Δ в каждом звене, исходя из условия, что максимальная амплитуда меньше половины младшего бита.

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД

Положим, что справедлива вероятностная модель округления чисел [3]. При этом ошибка округления является случайной величиной и трактуется как шум округления с предписанными свойствами. Рассмотрим два варианта определения параметров Δ и δ на основе вероятностных оценок ошибки.

Вариант 1. Для фильтра, показанного на рисунке, определим три составляющие дисперсии шума округления на его выходе:

$$\sigma_v^2 = \hat{\sigma}_v^2 G_v, v = 0, 1, 2, \quad (2)$$

где

$$G_v = \frac{1}{2\pi j} \sum_{k=m}^M \oint_{|z|=1} \prod_{i=k}^L H_i(z) H_i(z^{-1}) \frac{dz}{z} + X_v,$$

$$H_i(z) = 1 / (1 + a_{1i} z^{-1} + a_{2i} z^{-2})$$

при $v = 1$ и $i = k$,

$$\hat{\sigma}_v^2 = \begin{cases} 2^{-2W} / 3, & v = 0, \\ 2^{-2(W+\delta+\Delta)} / 3, & v = 1, \\ 2^{-2(W+\delta)} / 3, & v = 2, \end{cases}$$

$$X_v = \begin{cases} 1, & v = 0, \\ 0, & v > 0, \end{cases}$$

$$M = \begin{cases} L, & v > 0, \\ 1, & v = 0, \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} 1, & v = 0, 1, \\ 2, & v = 2. \end{cases}$$

Здесь $\hat{\sigma}_v^2$ – дисперсии источника шума округления на входе или выходе фильтра ($v = 0$), внутри каждого звена ($v = 1$) и между звеньями ($v = 2$). Интеграл в выражении для G_v можно раскрыть, в частности, с помощью теоремы вычетов, что было выполнено, например, в [4].

Параметры δ и Δ найдём исходя из критерия:

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \leq \sigma_0^2.$$

Вначале, полагая $\sigma_2^2 \leq \sigma_0^2 / 2$ и используя соотношение (2), определим дополнительную длину слова:

$$\delta = \left\langle \frac{1}{2} \log_2 \frac{2G_2}{G_0} \right\rangle;$$

а затем, используя приведённый выше критерий и соотношение (2), получим дополнительную длину слова:

$$\Delta = \left\langle \frac{1}{2} \log_2 \frac{G_1}{G_0 2^{2\delta} - G_2} \right\rangle.$$

Здесь и далее $\langle x \rangle$ – наименьшее целое, большее или равное x .

Вариант 2. Определим теперь спектральные плотности мощности рассматриваемых составляющих шума на выходе фильтра:

$$S_v(f) = \hat{\sigma}_v^2 D_v(f), \quad v = 0, 1, 2, \quad (3)$$

где

$$D_v(f) = \sum_{k=m}^M \prod_{i=k}^L |H_i(z)|_{z=\exp(j2\pi f)}^2 + X_v,$$

частота f нормирована относительно частоты дискретизации, а все другие константы и соотношения задаются как для (2).

Параметры Δ и δ найдём исходя из критерия:

$$\max_f S(f) = \max_f \sum_{v=0}^2 S_v(f) \leq 2 \max_f S_0(f),$$

где частота f изменяется в пределах полосы пропускания фильтра. Сначала используем условие $\max_f S_1(f) \leq \max_f S_0(f)$, соотношение (3) и представленные ранее выражения для $\hat{\sigma}_v^2, v = 0, 1$ с целью предварительного определения дополнительной длины слова:

$$\delta + \Delta = \left\langle \frac{1}{2} \log_2 \frac{\max_f D_1(f)}{\max_f D_0(f)} \right\rangle.$$

Затем, полагая поочередно параметр δ равным $0, 1, \dots, \delta + \Delta - 1$, а параметр Δ равным $\delta + \Delta, \delta + \Delta - 1, \dots, 1$, найдём минимальное δ и соответствующее ему Δ , при которых удовлетворяется представленный критерий. Если решение задачи не существует, то параметр $\delta + \Delta$ увеличим на 1 и повторяем процедуру.

Точные значения максимумов в приведённых выражениях вычислить трудно, но их можно найти приближённо на конечном числе частотных точек в пределах полосы пропускания фильтра.

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ПОДХОД

Детерминированный метод [3] позволяет вычислить верхнюю границу амплитуды ошибки на выходе фильтра, обусловленной округлениями, при произвольных входных сигналах и внутренних переменных. Рассмотрим определение параметров Δ и δ на основе этой границы.

Вариант 3. Для фильтра, показанного на рисунке, верхние границы амплитуд обсуждаемых составляющих ошибки на выходе равны:

$$e_v = \hat{e}_v C_v, \quad v = 0, 1, 2, \quad (4)$$

где

$$C_v = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} |b(n)| + 1, & v = 0, \\ \sum_{i=1}^L \sum_{n=0}^{\infty} |g_i(n)|, & v = 1, \\ \sum_{i=2}^L \sum_{n=0}^{\infty} |p_i(n)|, & v = 2, \end{cases}$$

$$\hat{e}_v = \begin{cases} 2^{-W}, & v = 0, \\ 2^{-W-\delta-\Delta}, & v = 1, \\ 2^{-W-\delta}, & v = 2, \end{cases}$$

$b(n)$ – импульсная характеристика фильтра, $g_i(n)$ – импульсная характе-

ристика от места округления в i -ом звене до выхода фильтра, $p_i(n)$ – импульсная характеристика от входа i -го звена до выхода фильтра, \hat{e}_v – максимальная амплитуда источника ошибки округления на входе или выходе фильтра ($v = 0$), внутри каждого звена ($v = 1$) и между звеньями ($v = 2$).

Параметры δ и Δ найдём, исходя из критерия:

$$e_1 + e_2 \leq (\sqrt{2} - 1)e_0 \approx 0,414e_0.$$

Сначала, полагая $e_2 \leq 0,207e_0$ и используя (4), определим дополнительную длину слова:

$$\delta = \left\langle \log_2 \frac{C_2}{0,207C_0} \right\rangle,$$

а затем, используя приведённый критерий и соотношение (4), получим дополнительную длину слова:

$$\Delta = \left\langle \log_2 \frac{C_1}{0,414C_0 2^{\delta} - C_2} \right\rangle.$$

Из-за бесконечного предела суммирования в выражениях для C_v границы амплитуд e_v могут быть вычислены лишь с определённой точностью. Для фильтров с узкой полосой (пропускания, задерживания или переходной) из-за более длительных переходных характеристик потребуется большее время вычисления.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЯМОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Известно, что при нулевом входном сигнале ошибка на выходе БИХ-фильтра, обусловленная округлением в цепях обратной связи, если не становится равной нулю, то принимает детерминированный, колебательный характер. Возникает малый предельный цикл. Фактическую максимальную амплитуду предельного цикла на выходе фильтра при нулевом входе можно найти путём прямого моделирования, применив исчерпывающий поиск для всех возможных значений переменных внутри фильтра. Область поиска ограничивается некоторой теоретической верхней границей амплитуды, например, полученной на основе детерминированного метода, которая может быть много больше фактической амплитуды.

К сожалению, эта процедура требует больших вычислительных затрат, особенно для фильтров среднего и высокого порядка, причём даже для наиболее сжатой области поиска [5]. Поэтому ещё один вариант определения Δ мы получим на основе знания фактических максимальных амплитуд предельного цикла на выходе отдельно взятых звеньев каскадного фильтра.

Вариант 4. Воспользуемся алгоритмом исчерпывающего поиска [6], разработанного для звеньев 2-го порядка прямой формы. Найденные с помощью этого алгоритма максимальные целочисленные амплитуды предельных циклов для отдельно взятых звеньев обозначим как A_i .

Для i -го звена фильтра, показанного на рисунке, исходя из критерия

$$A_i 2^{-\Delta} < 1/2, i = 1, 2, \dots, L,$$

найдем дополнительную длину слова:

$$\Delta_i = \begin{cases} 0, & A_i = 0, \\ \lceil \log_2 A_i \rceil + 1, & A_i > 0, \end{cases}$$

$$\Delta' = \begin{cases} \max \left\{ \max_i (\Delta_i), \Delta_L - \delta \right\}, & i = 1, 2, \dots, L \text{ и } \Delta_L \geq \delta + \Delta, \\ \max \left\{ \max_i (\Delta_i), \Delta \right\}, & i = 1, 2, \dots, L-1 \text{ и } \Delta_L < \delta + \Delta. \end{cases}$$

Возможен и другой способ, когда в случае нарушения i -го условия в (5) параметр Δ для i -го звена полагается равным Δ_i при $i \neq L$ и равным $\Delta_L - \delta$ при $i = L$. Оба способа коррекции приводят к устранению предельного цикла на выходе фильтра, первый – при идентичных значениях Δ в каждом звене, а второй – при разных значениях Δ .

Заметим, что алгоритм [6] может потребовать больших вычислительных затрат, особенно в случае полюсного радиуса звена, очень близкого к единице, и/или его полюсного угла, очень близкого к 0 или π . Это связано с увеличением амплитуды предельного цикла и длительности переходных процессов для таких звеньев.

ПРИМЕРЫ

Итак, имеем три варианта определения пар параметров Δ, δ и дополнительный вариант определения Δ . Результаты, которые дают эти варианты, исследуем на конкретных примерах БИХ-фильтров 8-го и 12-го порядка, синтезированных с помощью программы DIFID [7].

где $\lfloor x \rfloor$ означает наименьшее целое большее x . Такой выбор Δ_i гарантирует, что после округления до $W + \delta + \Delta_i$ бит внутри и до $W + \delta$ бит на выходе звена предельный цикл на выходе будет отсутствовать. Очевидно, на выходе каскадного фильтра (см. рисунок) при нулевом входе предельный цикл также будет отсутствовать.

Знание параметров $\Delta_i, i = 1, 2, \dots, L$ позволяет судить о том, гарантирует ли выбор пары Δ, δ согласно вариантам 1 – 3 отсутствие предельного цикла на выходе фильтра при нулевом входе. Очевидно, предельный цикл для того или иного варианта будет отсутствовать, если выполняются следующие условия:

$$\Delta \geq \Delta_i, i = 1, 2, \dots, L-1 \text{ и } \Delta + \delta \geq \Delta_L. \quad (5)$$

Если хотя бы одно условие в (5) не выполняется, а требуется устранить предельный цикл, то параметр Δ необходимо скорректировать; например, его можно заменить на

Пример 1. Параметры синтезированного каскадного ФНЧ 8-го порядка:

- граничные частоты 0,019 и 0,023;
- неравномерность АЧХ в полосе пропускания 0,089 дБ;
- ослабление АЧХ в полосе задерживания $\geq 60,7$ дБ;
- максимальный коэффициент передачи от входа фильтра до выхода каждого звена 0 дБ;

Таблица 1. Коэффициенты каскадного ФНЧ 8-го порядка

i	a_{1i}	a_{2i}	$b_{0i} = b_{2i}$	b_{1i}
1	-1,924072265625	0,932861328125	0,14501953125	-0,283203125
2	-1,956298828125	0,96923828125	0,33935546875	-0,669921875
3	-1,890380859375	0,89453125	0,025634765625	-0,04345703125
4	-1,9765625	0,991455078125	0,698486328125	-1,382080078125

Таблица 2. Результаты расчёта параметров Δ, δ и $\Delta + \delta$ для ФНЧ 8-го порядка

№	Критерий	Δ бит	δ бит	$\Delta + \delta$ бит
1	$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \leq \sigma_0^2$	6	1	7
2	$\max_f S(f) \leq 2 \max_f S_0(f)$	7	3	10
3	$e_1 + e_2 \leq (\sqrt{2} - 1)e_0$	7	5	12
4	$A_i \times 2^{-\Delta} < 1/2, i = 1, 2, 3, 4$	7, 7, 8, 7	-	-

- соответствующие значения коэффициентов (1) приведены в таблице 1.

Результаты расчётов параметров Δ, δ и $\Delta + \delta$ согласно вариантам 1 – 4 представлены в таблице 2. Там же для удобства указаны соответствующие критерии. Видно, что значения дополнительной длины слова переменных в цепях прямой и обратной связи, т.е. δ и $\Delta + \delta$, сильно отличаются и зависят от варианта их определения.

Как показывают расчёты, если в фильтре не использовать округления между звеньями, то для каждой из этих цепей значения дополнительной длины слова будут равны 7, 10 и 11 бит соответственно для вариантов 1, 2 и 3, в отличие от значений, представленных в колонках δ и $\Delta + \delta$ таблицы 2. Это говорит о том, что введение округления между звеньями даёт существенную экономию дополнительной длины слова в цепях прямой связи фильтра и требует увеличения длины слова на 1 бит в цепях обратной связи, но лишь в случае варианта 3.

Для варианта 4 значения Δ в звеньях могут иметь отличия, что отражено в таблице 2, и, напомним, определены так, чтобы устранить предельные циклы на выходе каждого звена при нулевом сигнале на его входе. Выбор Δ согласно вариантам 1 – 3 не обеспечивает устранения предельных циклов, поскольку не выполняются условия (5). Это легко исправить описанными ранее способами коррекции Δ , полагая для всех этих вариантов $\Delta = 8$ или используя для варианта 1 значения Δ , равные 7, 7, 8, 6, а для вариантов 2 и 3 – равные 7, 7, 8, 7. Ин-

Таблица 3. Коэффициенты каскадного ФНЧ 12-го порядка

i	a_{1i}	a_{2i}	$b_{0i} = b_{2i}$	b_{1i}
1	-1,423828125	0,52734375	0,03662109375	0,0302734375
2	-1,4677734375	0,68212890625	0,208984375	-0,20361328125
3	-1,51220703125	0,837890625	0,521484375	-0,71728515625
4	-1,5390625	0,9287109375	0,7666015625	-1,1435546875
5	-1,55224609375	0,97216796875	0,8955078125	-1,37158203125
6	-1,56103515625	0,99267578125	0,94580078125	-1,4609375

Таблица 4. Результаты расчёта параметров Δ , δ и $\Delta + \delta$ для ФНЧ 12-го порядка

№	Критерий	Δ бит	δ бит	$\Delta + \delta$ бит
1	$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \leq \sigma_0^2$	3	2	5
2	$\max_f S(f) \leq 2 \max_f S_0(f)$	5	4	9
3	$e_1 + e_2 \leq (\sqrt{2} - 1)e_0$	3	7	10
4	$A_i \times 2^{-A} < 1/2, i = 1, 2, \dots, 6$	4, 3, 4, 5, 5, 7	-	-

интересно, что для варианта 1 при всех $\Delta = 8$ можно вместо $\delta = 1$ использовать $\delta = 0$. Так или иначе, цена устранения предельных циклов для отдельных звеньев составляет 0, 1 или 2 бита и зависит от варианта определения параметров Δ и δ .

Пример 2. Параметры синтезированного каскадного ФНЧ 12-го порядка:

- граничные частоты 0,10625 и 0,109375;
- неравномерность АЧХ в полосе пропускания 0,076 дБ;
- ослабление АЧХ в полосе задерживания ≥ 60 дБ;
- максимальный коэффициент передачи от входа фильтра до выхода каждого звена 0 дБ;
- соответствующие значения коэффициентов (1) приведены в таблице 3.

Результаты расчёта параметров Δ , δ и $\Delta + \delta$ представлены в таблице 4. Полученные значения δ для цепей прямой и $\delta + \Delta$ для цепей обратной связи существенно отличаются и зависят от вариантов их определения.

Можно убедиться путём расчёта, что если в данном фильтре не использовать округления между звеньями, то значения дополнительной длины слова для этих цепей будут совпадать с представленными в колонке $\delta + \Delta$ таблицы 4. Это означает, что введение округления между звеньями даёт существенную экономию дополнительной длины слова в цепях прямой связи фильтра, особенно для вариантов 1 и 2.

Разброс по параметру Δ для варианта 4, которому свойственно отсутствие

предельного цикла при нулевом входе, здесь составляет 4 бита, а в примере 1 – всего 1 бит. Как видим, выбор Δ согласно варианту 2 обеспечивает (условия (5) выполнены), а согласно вариантам 1 и 3, не обеспечивает отсутствие предельных циклов. Последнее положение можно исправить, заменив все $\Delta = 3$ на $\Delta = 5$ или на 4, 3, 4, 5, 5, 5 и 4, 3, 4, 5, 5, 3 соответственно для вариантов 1 и 3. Таким образом, цена устранения предельных циклов для отдельных звеньев составляет 0, 1 или 2 бита и зависит от варианта определения параметров Δ и δ .

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование округления между звеньями каскадного БИХ-фильтра, наряду с округлением внутри звеньев, позволяет выбирать неодинаковые значения длины слова переменных в цепях прямой и обратной связи. В статье представлены варианты определения длины слова в этих цепях, основанные на критериях ограничения дисперсии, максимума спектральной плотности мощности, верхней границы амплитуды или фактической максимальной амплитуды ошибки, обусловленной округлениями.

Полученные численные результаты для двух фильтров 8-го и 12-го порядка позволяют сделать следующие выводы. Значения длины слова переменных в цепях прямой и обратной связи фильтра различаются и зависят от вариантов их определения. Введение округления между звеньями позволяет существенно экономить длину сло-

ва в цепях прямой связи фильтра при её сохранении или увеличении в цепях обратной связи, но не более чем на 1 бит. Кроме того, благодаря знанию фактических максимальных амплитуд предельного цикла для отдельно взятых звеньев, появляется возможность устранить предельные циклы на выходе фильтра при нулевом входе, но вынуждает увеличивать длины слова переменных в цепях обратной связи отдельных звеньев фильтра.

Можно предположить, что это увеличение не потребует или понадобится в меньшей степени, если определение длины слова выполнить на основе знания фактической максимальной амплитуды предельного цикла на выходе фильтра, а не отдельно взятых его звеньев. При этом возможное увеличение длины слова в цепях обратной связи необходимо будет выполнить лишь для последнего звена. К сожалению, поиск фактической максимальной амплитуды, использующий перебор возможных значений переменных, связан с большими вычислительными затратами, особенно для фильтров среднего и высокого порядка, что затрудняет его применение на практике.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Butterweck H.-J., Ritzerfeld J., Werter M.* Finite wordlength effects in digital filters. AEU. 1989. Vol. 43. № 2. PP. 76–89.
2. *Debner G.* Noise optimized IIR digital filter design – tutorial and some new aspects. Signal Processing. 2003, Vol. 83. PP. 1565–1582.
3. *Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н.* Цифровая обработка сигналов: Справочник. Радио и связь, 1985.
4. *Мингазин А.Т.* Расчёт масштабных множителей и дисперсии шума каскадных рекурсивных цифровых фильтров. Электронная техника. Серия 10. 1991. № 2. С. 41–46.
5. *Oses-del Campo J.D., Cruz-Roldan F., Utrilla-Manso M.* Tighter limit cycle bounds for digital filters. IEEE Signal Processing Letters. 2006. Vol. 13. № 3. PP. 149–152.
6. *Djebbari A., Belbachir M.F., Rouaen J.M.* A fast exhaustive search algorithm for checking limit cycles in fixed-point digital filters. Signal Processing. 1998. Vol. 69. PP. 199–205.
7. *Мингазин А.Т.* Программа DIFID: Эффективный синтез каскадных цифровых БИХ-фильтров. 4-я Международная конференция «Цифровая обработка сигналов и её применение (DSPA)». 2002. Т. 1. С. 90–93.

