

Модификация алгоритма синтеза цифровых фильтров на основе фазовых цепей с конечной длиной слова коэффициентов

Александр Мингазин (Москва)

В статье рассматривается задача синтеза цифровых фильтров на основе параллельного соединения двух фазовых цепей с конечной длиной слова коэффициентов. Для её решения предлагается использовать модифицированный алгоритм вариации исходных параметров, который может значительно улучшить результаты синтеза. Суть модификации – использование ещё одного варьируемого параметра, а именно порядка фильтра, который изменяется в алгоритме непрерывно, принимая нецелочисленные значения в соотношениях для расчёта коэффициентов. При этом собственно порядок фильтра остаётся неизменным и равным целому числу. Эффективность алгоритма подтверждена примерами синтеза.

ВВЕДЕНИЕ

Структура цифрового фильтра на основе параллельного соединения двух фазовых (всепропускающих) цепей считается одной из лучших среди БИХ-структур. Каждая фазовая цепь соответствует каскадному соединению фазовых звеньев не выше 2-го порядка, каждое такое звено требует не более двух умножителей и может быть выполнено на основе волновых адаптеров, что обеспечивает хорошие шумовые свойства и устойчивость к переполнению. Такие фильтры не требуют подбора полюсно-нулевых пар и упорядочения звеньев для минимизации шума округления, характерных для каскадных БИХ-фильтров. Они удобны для построения банков фильтров со свойством дополнения по мощности.

Цифровые фильтры могут быть реализованы на умножителях или без таковых. В последнем случае умножители заменяются сумматорами и элементами сдвига. Для каждой из этих реализаций на заказных или полужаказных СБИС важно минимизировать длину слова коэффициентов, а в структуре фильтра без умножителей, кроме того, – полное число сумматоров. Для решения этих задач (синтеза фильтров с конечной длиной слова коэффициентов) могут быть применены методы, использующие вариацию коэффициентов (ВК), вариацию исходных параметров (ВИП) или их сочетание.

Для фильтров на основе параллельного соединения двух фазовых цепей лишь алгоритм полного перебора коэффици-

ентов, который может потребовать больших временных затрат (десятки часов работы компьютера [1]), позволяет гарантированно находить глобально оптимальные решения. Однако другие алгоритмы могут приводить к решениям близким к таковым за приемлемое время. Это важно в инженерной практике, которой, как правило, свойственно проведение расчётов для многих вариантов с целью выбора наилучшего.

Предложен [1] алгоритм ВК, основанный на полном переборе коэффициентов рассматриваемых фильтров. Для ряда примеров фильтров, требования к которым взяты из публикаций разных авторов, демонстрируется эффективность предлагаемого алгоритма в случае решений с минимальной длиной слова коэффициентов или с минимальным числом сумматоров, заменяющих умножители. Результаты совпадают, близки или существенно превосходят результаты, ранее полученные другими алгоритмами, в том числе и алгоритмом ВИП [2].

Найденные [1] коэффициенты фильтров представлены на интернет-странице <http://www.cs.tut.fi/~ylikaaki/CASILWD/results.m>. Для сравнения там же приведены коэффициенты, полученные ранее другими авторами. Однако для полуполосного фильтра 15-го порядка представленные результаты не комментируются и не сравниваются с другими решениями. Как оказалось, именно для этого фильтра, не рассмотренного в [2], алгоритм ВИП приводит к существенно худшим результатам, ко-

торым соответствует, в частности, минимальное ослабление АЧХ в полосе задерживания на 25 дБ меньше, чем достигнутое в [1]. Этот факт послужил поводом для дальнейшего изучения метода ВИП. В данной статье показано, что введение ещё одного варьируемого параметра в алгоритм ВИП, а именно порядка фильтра, который может изменяться непрерывно, принимая нецелочисленные значения в соотношениях для расчёта коэффициентов, позволяет получать решения, аналогичные достигнутым полным перебором [1]. При этом собственно порядок фильтра остаётся неизменным и равным целому числу.

ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ И КОЭФФИЦИЕНТЫ

Передающую функцию цифрового ФНЧ на основе параллельного соединения двух фазовых цепей можно представить в виде:

$$H(z) = \frac{1}{2} \left[A_0(z) \prod_{i=2,4,\dots}^K A_i(z) + \prod_{i=1,3,\dots}^K A_i(z) \right], \quad (1)$$

где

$$A_0(z) = \frac{\alpha_0 + z^{-1}}{1 + \alpha_0 z^{-1}},$$

$$A_i(z) = \frac{\beta_i + \alpha_i(1 + \beta_i)z^{-1} + z^{-2}}{1 + \alpha_i(1 + \beta_i)z^{-1} + \beta_i z^{-2}}$$

$K \leq (N - 1)/2$, $\beta_i < \beta_{i+1}$, N – нечётный порядок фильтра.

Как видим, каждая фазовая цепь соответствует каскадному соединению фазовых звеньев не выше 2-го порядка. При этом каждое фазовое звено $A_i(z)$ соответствует волновой структуре [1]. Для ФНЧ Золотарёва–Кауэра коэффициенты α_i, β_i в (1) являются функциями исходных параметров АЧХ – неравномерности в полосе пропускания $\Delta\alpha$ и граничных частот f_1 и f_2 . В случае специальных фильтров Золотарёва–Кауэра – Q_{\min} -фильтров [3] и полуполосных фильтров – коэффициенты в (1) определяются соответственно двумя (f_1 и

f_2) и одним параметром АЧХ (f_1 или f_2). Кроме того, для полуполосного фильтра $\alpha_i = 0, i = 0, 1, \dots, K$.

МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ВИП

В алгоритме ВИП, в зависимости от типа фильтра Золотарёва–Кауэра (специальный или обычный), вариации подлежат от одного до трёх параметров. Были предложены [2] соответствующие версии алгоритма ВИП. На самом деле коэффициенты в (1) являются также функциями порядка фильтра N . Здесь предлагается, наряду с вариацией параметров АЧХ в алгоритме ВИП, и использовать вариацию порядка, который может принимать нецелочисленные значения в расчётных соотношениях для коэффициентов, но собственно порядок фильтра N при этом остаётся фиксированным и равным целому числу. Чтобы избежать путаницы, порядок фильтра, входящий в расчётные соотношения и подлежащий вариации, будем далее обозначать как N_0 .

Итак, в модифицированном таким образом алгоритме ВИП, в зависимости от типа фильтра, вариации подлежат от двух до четырёх параметров. Напомним, что число переменных в методе ВК равно N для обычного фильтра, $(N + 3)/2$ для Q_{\min} -фильтра и $(N - 1)/2$ для полуполосного фильтра.

ПРИМЕРЫ СИНТЕЗА

Ниже рассмотрены три примера синтеза с помощью модифицированного алгоритма ВИП, которые оправдывают введение вариации N_0 . В первом примере требуется максимизировать ослабление АЧХ в полосе задерживания \tilde{a}_0 при заданной длине слова коэффициентов M . Здесь и далее знак \sim означает соответствие решению с квантованными коэффициентами. Этот пример синтеза полуполосного фильтра с $N = 15$ упоминался выше и обсуждается достаточно подробно.

Во втором примере синтеза ФНЧ требуется минимизировать общее число сумматоров Σ_m , заменяющих множители. Для этих двух примеров получены [1] глобально оптимальные решения алгоритмом полного перебора коэффициентов.

В третьем примере для полуполосного фильтра, рассмотренного ранее [4], решаются задачи минимизации Σ_m и/или M .

Далее используются следующие обозначения: $q = 2^{-M}$ шаг квантования коэффициентов, а f_{1n} и f_{2n} – номинальные граничные частоты. Все приводимые значения граничных частот нормированы относительно частоты дискретизации.

Пример 1. Требования к полуполосному ФНЧ: $\tilde{a}_0 \rightarrow \max, f_{1n} = 0,5 - f_{2n}, f_{2n} = 0,3125, N = 15$ и $M = 8$.

Для полуполосного ФНЧ Золотарёва–Кауэра с непрерывными ($M = \infty$) коэффициентами ослабление $a_0 = 133$ дБ. Простое округление (ПО) коэффициентов до $M = 8$ даёт $\tilde{a}_0 = 48$ дБ. На рисунке 1 показаны соответствующие АЧХ фильтра до и после округления его коэффициентов.

Алгоритмами ВК найдены [1, 5] решения с $\tilde{a}_0 = 98$ дБ и $\tilde{a}_0 = 85$ дБ соответственно. Напомним, что в [1] использован алгоритм по методу перебора в очень большом пространстве поиска квантованных коэффициентов. Применение алгоритма ВИП [2] приводит к решению лишь с $\tilde{a}_0 = 73$ дБ. Сравнение коэффициентов из [1] и найденных с помощью алгоритма ВИП показывает очень сильное различие, для некоторых из них – вплоть до $9q$. Только при $M = 11$ в случае применения алгоритма ВИП и лишь при $M = 16$ в случае использования ПО можно получить $\tilde{a}_0 \geq 98$ дБ. Заметим, что для другого полуполосного фильтра с $N = 11$ найдены [1, 2] идентичные результаты, причём решение в [2] соответствует начальному приближению.

Интересными оказались следующие наблюдения. Для полуполосного фильтра Золотарёва–Кауэра при $a_0 \geq 98$ дБ и данных граничных частотах минимальный порядок $N = 12$ и $a_0 = 105$ дБ. Известно, что для рассматриваемой структуры порядка фильтра может быть только нечётным. Для фильтра с $N = 13$ в случае непрерывных коэффициентов ослабление $a_0 = 115$ дБ. Если для $N = 13$ выполнить расчёт одного из начальных приближений согласно [2], то соответствующие коэффициенты оказываются гораздо ближе к коэффициентам из [1], чем при $N = 15$. Максимальное отличие составляет не более $5q$. Для «несуществующего» фильтра с $N = 14$ коэффициенты начального приближения оказываются ещё ближе, а именно на расстоянии не более $3q$.

Далее, если для $N = 15$ рассчитать начальные приближения, как в [2], но положить при этом в расчётных соотно-

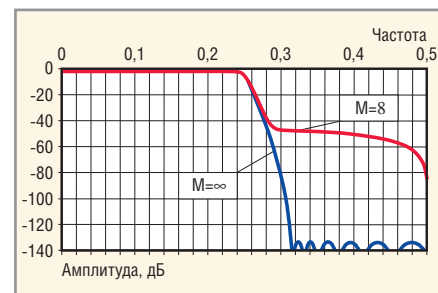


Рис. 1. АЧХ полуполосного ФНЧ ($N = 15$) с непрерывными ($M = \infty$) и округлёнными ($M = 8$) коэффициентами, рассчитанными для исходной граничной частоты $f_2 = 0,3125$

шениях для коэффициентов порядок $13,58 \leq N_0 \leq 13,62$, то получим одно из приближений с $\tilde{a}_0 = 48$ дБ, отличающееся от решения [1] только одним коэффициентом и лишь на q . Этот коэффициент $\beta_1 = 0,00390625$, а в [1] $\beta_1 = 0,0078125$, и, напомним, получено $\tilde{a}_0 = 98$ дБ. Как видим, цена «малого» отличия β_1 (всего на q , но в тоже время в два раза) составляет $98 - 48 = 50$ дБ. Подобрать N_0 так, чтобы β_1 оказалось равным $0,0078125$, но без одновременного изменения других коэффициентов, не удаётся.

Здесь уместно вспомнить, что коэффициенты полуполосных фильтров Золотарёва–Кауэра являются также функциями частоты f_2 . Поэтому была сделана попытка найти решение [1], применив вариацию двух параметров – N_0 и f_2 . Однако это позволило лишь незначительно улучшить упомянутое выше решение, найденное с помощью алгоритма ВИП [2]. Переход от полуполосного фильтра к Q_{\min} -фильтру с последующей вариацией его параметров f_1, f_2 и N_0 также не увенчался успехом.

И всё же решение [1] с $\tilde{a}_0 = 98$ дБ можно найти с помощью предлагаемого алгоритма ВИП, перейдя от полуполосного фильтра к обычному ФНЧ и используя вариацию параметров $\Delta a, f_1, f_2, N_0$, положив все $\alpha_i = 0$ (как в полуполосном фильтре).

Действительно, если по исходным параметрам $\Delta a = 2,1 \times 10^{-12}$ дБ (или $1,37 \times 10^{-10}$ дБ), $f_1 = 0,193386, f_2 = 0,306614$ и $N_0 = 13,5$, найденным с помощью модифицированного алгоритма, считать ФНЧ Золотарёва–Кауэра, положить все $\alpha_i = 0$ и округлить все β_i до $M = 8$, то получим коэффициенты из [1]: $\beta_1 = 0,0078125; \beta_2 = 0,0546875; \beta_3 = 0,16015625; \beta_4 = 0,30859375; \beta_5 = 0,48046875; \beta_6 = 0,66796875; \beta_7 = 0,87890625$. Заметим, что N_0 – не целое число, и ФНЧ даже с непрерывными

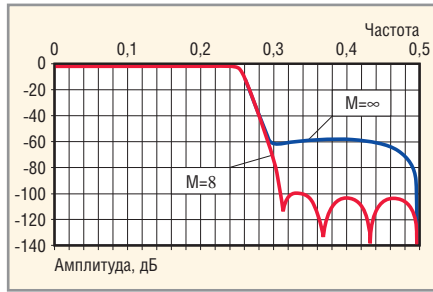


Рис. 2. АЧХ полуполосного ФНЧ ($N = 15$) с непрерывными ($M = \infty$) и округлёнными ($M = 8$) коэффициентами, рассчитанными по исходным параметрам $\Delta a = 2,1e-12$ дБ, $f_1 = 0,193386$, $f_2 = 0,306614$ и $N_0 = 13,5$ при всех $\alpha_i = 0$

коэффициентами уже не будет обладать свойствами ФНЧ Золотарёва–Кауэра.

Для наглядности в таблице представлены результаты синтеза рассмотренного фильтра, полученные обсуждаемыми здесь алгоритмами, в том числе и модифицированным алгоритмом ВИП (МВИП).

На рисунке 2 показаны АЧХ фильтра до и после округления его коэффициентов β_i , которые рассчитаны по исходным параметрам, найденным с помощью алгоритма МВИП. Как видим, АЧХ фильтра с непрерывными коэффициентами ($M = \infty$) намного хуже АЧХ фильтра с округлёнными коэффициентами ($M = 8$), т. е. округление коэффициентов приводит в данном случае к улучшению АЧХ. Это интересный факт, поскольку обычно бывает наоборот, как на рисунке 1, где округление коэффициентов ухудшает АЧХ идеального ($M = \infty$) фильтра.

Пример 2. Требования к ФНЧ: $\tilde{\alpha}_0 \leq \leq 0,2$ дБ, $\tilde{\alpha}_0 \geq 65$ дБ, $f_{1n} = 0,2125$, $f_{2n} = 0,2875$, $N = 7$, $\Sigma_m \rightarrow \min$. В [2] найдено решение с $\Sigma_m = 10$ и $\tilde{\alpha}_0 = 64,88$ дБ при $M = 6$. Это решение удалось улучшить [1], получив $\Sigma_m = 8$ и $\tilde{\alpha}_0 = 65,13$ дБ при том же M . Использование алгоритма МВИП приводит к аналогичному улучшению. При этом $\Delta a = 0,005615$ дБ, $f_1 = 0,207633$, $f_2 = 0,282827$ и $N_0 = 6,94$. Соответствующие коэффициенты $\alpha_0 = -2^{-2} - 2^{-5}$; $\alpha_1 = -2^{-1} + 2^{-4} + 2^{-6}$; $\beta_1 = 2^{-2} - 2^{-5}$; $\alpha_2 = -2^{-2}$; $\beta_2 = 2^{-1} + 2^{-5}$; $\alpha_3 = -2^{-3} - 2^{-5}$; $\beta_3 = 1 - 2^{-3} - 2^{-5}$ совпадают с представленными

Результаты синтеза полуполосного ФНЧ с $N=15$

Алгоритм	$\tilde{\alpha}_0$, дБ ($M = 8$)	M ($\tilde{\alpha}_0 \geq 98$ дБ)
ПО	48	16
ВК [5]	85	8
ВК [1]	98	8
ВИП [2]	73	11
МВИП	98	8
Для непрерывных коэффициентов ($M = \infty$) $\alpha_0 = 133$ дБ		

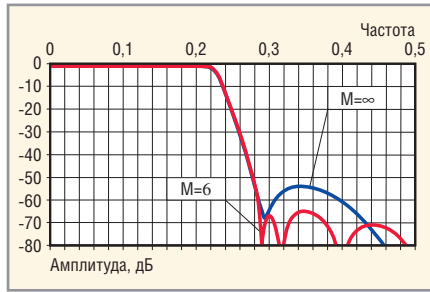


Рис. 3. АЧХ ФНЧ ($N = 7$) с непрерывными ($M = \infty$) и округлёнными ($M = 6$) коэффициентами, рассчитанными по исходным параметрам $\Delta a = 0,005615$ дБ, $f_1 = 0,207633$, $f_2 = 0,282827$ и $N_0 = 6,94$

ми [1]. Воспроизвести это решение можно путём расчёта ФНЧ Золотарёва–Кауэра по найденным исходным параметрам $\Delta a, f_1, f_2$ и N_0 с последующим округлением коэффициентов до $M = 6$. На рисунке 3 показаны АЧХ фильтра до и после округления его коэффициентов соответственно при $M = \infty$ и $M = 6$. Как видим, АЧХ фильтра с непрерывными коэффициентами хуже (хотя и не так значительно, как на рисунке 2) АЧХ фильтра с округлёнными коэффициентами.

Пример 3. Требования к полуполосному ФНЧ: $\tilde{\alpha}_0 \geq 46$ дБ, $f_{2n} = 0,27$, $N = 9$, $\Sigma_m \rightarrow \min$ и/или $M \rightarrow \min$. В [4] с помощью алгоритма, сочетающего ВИП и ВК, удалось получить решение с $\Sigma_m = 6$, $M = 8$ и $\tilde{\alpha}_0 = 46,13$ дБ. Использование только МВИП позволяет найти аналогичный результат. При этом $f_2 = 0,2706$ и $N_0 = 8,89$, а соответствующие коэффициенты совпадают с найденными в [4].

Применение алгоритма ВИП не даёт решений для $M < 8$. Алгоритм МВИП приводит к допустимому результату с $M = 7$, $\Sigma_m = 8$ и $\tilde{\alpha}_0 = 46,08$ дБ. При этом $f_2 = 0,2703$ и $N_0 = 8,90$, а соответствующие коэффициенты $\beta_1 = 0,125$; $\beta_2 = 0,4140625$; $\beta_3 = 0,6953125$; $\beta_4 = 0,90625$. Воспроизвести это решение можно путём расчёта ФНЧ Золотарёва–Кауэра по найденным f_2 и N_0 с последующим округлением его коэффициентов до $M = 7$. На рисунке 4 показаны АЧХ фильтра до и после округления его коэффициентов соответственно при $M = \infty$ и $M = 7$. Как и в примерах 2 и 3, снова наблюдается улучшение АЧХ фильтра после квантования его коэффициентов.

В отличие от примера 1, представленные решения получены в рамках полуполосного проектирования (два варьируемых параметра f_2 и N_0), т. е. без обращения к общему случаю (четыре варьируемых параметра) и без преднамеренного обнуления всех коэффициентов α_i .

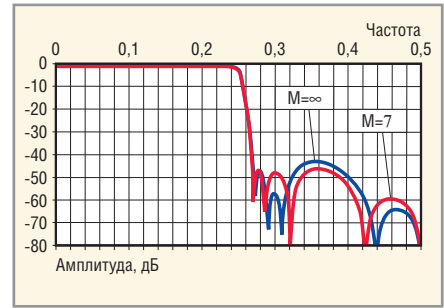


Рис. 4. АЧХ полуполосного ФНЧ ($N = 9$) с непрерывными ($M = \infty$) и округлёнными ($M = 7$) коэффициентами, рассчитанными по исходным параметрам $f_2 = 0,2703$ и $N_0 = 8,90$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная модификация алгоритма ВИП для синтеза цифровых фильтров на основе фазовых цепей с конечной длиной слова коэффициентов может приводить к существенному улучшению решений. В частности, ослабление АЧХ можно увеличить на 25 дБ или уменьшить длину слова на 3 бита (27%). Для двух примеров получены глобально оптимальные решения, ранее найденные и счерпывающим перебором коэффициентов в очень большой области их изменения. Однако модифицированный алгоритм не гарантирует нахождения глобальных решений во всех случаях и не всегда приводит к улучшению решений, полученных обычным алгоритмом ВИП.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Yli-Kaakinen J., Savamaki T.* A systematic algorithm for the design of lattice wave digital filters with short-coefficient wordlength. IEEE Trans. on CAS-I. 2 007. Vol. 54. No. 8. P. P. 1838–1851.
2. *Мингазин А.Т.* Синтез цифровых фильтров на основе фазовых цепей с конечной длиной слова коэффициентов. Вторая международная конф. «Цифровая обработка сигналов и ее применения» (DSPA). 1999. Т. 1. С. 112–116.
3. *Milic L.D., Lutovac M.D.* Design of multiplierless elliptic IIR filters with a small quantization error. IEEE Trans. 1 999. S P-47. No. 2. P. P. 469–479.
4. *Мингазин А.Т.* Синтез полуполосных цифровых фильтров без умножителей на основе фазовых цепей. Шестая международная конф. «Цифровая обработка сигналов и ее применение» (DSPA). 2004. Т. 1. С. 39–41.
5. *Krukowski A., Kale I.* Two approaches for fixed-point filter design: «bit-flipping» algorithm and constrained downhill simplex method. 5th Int. Symp. on Signal Processing and its Applications (ISSPA). 1999. Pp. 965–968.