

# Синтез цифровых полуполосных КИХ-фильтров без умножителей

Александр Мингазин (Москва)

Для синтеза цифровых полуполосных КИХ-фильтров без умножителей применён метод вариации исходных параметров взвешенной чебышевской аппроксимации. Сформулирована задача синтеза и предложены алгоритмы, улучшающие известные решения. Приведены найденные структуры двух фильтров, предназначенных для использования в цифровых широкополосных приёмниках.

## ВВЕДЕНИЕ

Интерес к проектированию цифровых фильтров без умножителей очень велик. За последние несколько лет появились десятки публикаций на данную тему. Это вызвано стремлением к использованию цифровой обработки сигналов (ЦОС) в высокочастотных системах и к размещению их на малом числе кристаллов или одном кристалле, руководствуясь новейшими достижениями интегральных технологий.

Цифровые полуполосные фильтры нашли широкое применение при интерполяции и прореживании во многих системах с ЦОС. В частности, на их основе строятся подполосные кодеки, широкополосные приёмники, трансмультиплексоры, модуляторы/демодуляторы однополосных сигналов и другие устройства. Полуполосные фильтры без умножителей очень экономичны для высокоскоростных реализаций на заказных или полузаказных СБИС, когда сигнальные процессоры не пригодны из-за их недостаточного быстродействия. В таких фильтрах до половины коэффициентов передаточной функции равны нулю, а оставшиеся коэффициенты представлены в виде суммы и/или разности чисел, равных степе-

ни двойки. В этом случае умножение на коэффициент заменяется параллельными операциями сдвига и суммирования (вычитания), что значительно упрощает реализацию функции и повышает её быстродействие.

На этапе синтеза цифровых фильтров без умножителей важно минимизировать полное число сумматоров, включая сумматоры, заменяющие умножители, и сумматоры структуры фильтра. В работе [1] для этого применительно к КИХ-фильтрам использован метод вариации исходных параметров взвешенной чебышевской аппроксимации (ВИП/ВЧА) и на конкретных примерах показана его эффективность. В данной статье формулируется задача синтеза полуполосных КИХ-фильтров без умножителей с помощью метода ВИП/ВЧА и предложены алгоритмы её решения, которые приводят к улучшению результатов [2, 3].

## УПРОЩЁННАЯ СТРУКТУРА ЦИФРОВОГО КИХ-ФИЛЬТРА

На рис. 1 представлена упрощённая структура цифрового КИХ-фильтра с линейной ФЧХ. Эта структура соответствует обращённой прямой форме и пригодна для реализации рассматриваемых полуполос-

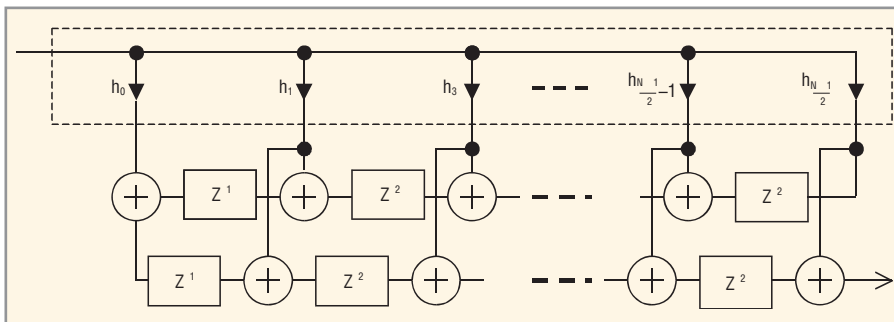


Рис. 1. Упрощённая структура цифрового КИХ-фильтра

ных КИХ-фильтров. Все отводы с чётными номерами отсутствуют, т.е. коэффициенты  $b_i = 0, i = 2, 4, \dots, (N - 1)/2 - 1, N -$  нечётное. Порядок фильтра равен  $N - 1$ . Импульсная характеристика симметрична относительно  $b_0$ . Значение  $N$  выбирают равным 7, 11, 15 и т.д. Значения  $N = 9, 13, 17, \dots$  приводят к аналогичным фильтрам из-за равенства нулю коэффициента с наибольшим индексом. Полуполосные фильтры с  $N = 3$  и 5 не дают выигрыша в сравнении с обычными фильтрами при  $N = 3$ .

Для реализации полуполосного фильтра требуется блок из  $(N - 3)/4 + 2$  умножителей (на рис. 1 он обведён пунктиром) и  $(N + 1)/2$  сумматоров. Эти сумматоры называют структурными в отличие от сумматоров, заменяющих блок умножения в фильтрах без умножителей.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА

Задачу синтеза цифровых полуполосных КИХ-фильтров без умножителей с помощью метода ВИП/ВЧА можно сформулировать как:

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathbf{p}) \rightarrow \min_{\mathbf{p}} \\ \tilde{e}(\mathbf{p}) = \max\{\tilde{\delta}_1(\mathbf{p}), \tilde{\delta}_2(\mathbf{p})\} \leq e_{\max}, \\ \mathbf{p} \in S(\mathbf{p}), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\Sigma$  – полное число сумматоров, включающее структурные сумматоры и сумматоры, заменяющие умножители на коэффициенты фильтра;  $\tilde{e}$  – максимальная ошибка, а  $e_{\max}$  – её заданное предельно допустимое значение;  $\tilde{\delta}_1$  и  $\tilde{\delta}_2$  – максимальные уровни пульсаций нормированной АЧХ в заданных номинальных полосах пропускания и задерживания,  $\mathbf{p}$  – вектор исходных параметров;  $S(\mathbf{p})$  – область допустимых исходных параметров; символ  $\sim$  означает соответствие квантованию коэффициентов.

Предполагается, что АЧХ нормирована относительно среднего уровня в полосе пропускания. Отклонения в

этой полосе не превышают  $\pm\tilde{\delta}_1$  от 1, а в полосе задерживания  $-\tilde{\delta}_1$  от 0. Оценки всех уровней выполняются на дискретном наборе частот.

Вектор исходных параметров:

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2) = (f_1, A)$$

или  $\mathbf{p} = (p_1, p_2) = (f_2, A)$ ,

где  $f_1$  и  $f_2$  – граничные частоты полосы пропускания и задерживания,  $A$  – масштабный множитель.

Как видим, для полуполосных КИХ-фильтров  $\mathbf{p}$  имеет размерность два, а не четыре, как для обычных КИХ-фильтров нижних (верхних) частот [1]. Это связано с симметрией АЧХ полуполосных фильтров:  $f_1 + f_2 = 0,5$  и  $\delta_1 = \delta_2$  частоты нормированы относительно частоты дискретизации.

Квантование коэффициентов фильтра выполняется следующим образом:

$$b_i = \left[ \frac{Ab_i}{b_0 q} \right] q \quad i = 0, 1, 3, \dots, (N - 1)/2,$$

где  $q = 2^M$  – шаг квантования,  $M$  – длина слова дробной части коэффициентов в их двоичном представлении,  $[x]$  – ближайшее целое к  $x$ ; знак равенства в этом соотношении означает присвоение.

Вектор коэффициентов является некоторой неявной вектор-функцией исходных параметров  $\mathbf{h} = \mathbf{F}(\mathbf{p})$ , и каждому значению вектора квантованных коэффициентов соответствует подобласть вне или внутри  $S(\mathbf{p})$  с определёнными значениями  $\Sigma$  и  $\tilde{e}$ . Число подобластей в  $S(\mathbf{p})$  ограничено и уменьшается с увеличением  $q$ . Подобласти имеют разные размеры и формы. Сформулированная задача заключается в обнаружении хотя бы одной подобласти, для которой имеют место условия (1). Это обнаружение автоматически определяет искомым вектор квантованных коэффициентов.

### Некоторые замечания

После квантования коэффициентов полуполосного КИХ-фильтра его, строго говоря, нельзя называть полуполосным, поскольку упомянутое свойство симметрии АЧХ нарушается. В этой связи к условиям (1) при необходимости можно добавить еще одно:

$$\Delta(\mathbf{p}) = \left| 1 - \tilde{\delta}_1(\mathbf{p}) / \tilde{\delta}_2(\mathbf{p}) \right| \leq \Delta_{\max}, \quad (2)$$

где  $\Delta$  – отклонение  $\tilde{\delta}_1/\tilde{\delta}_2$  от 1, а  $\Delta_{\max}$  – его предельно допустимое значение.

Чем меньше  $\Delta$ , тем ближе АЧХ фильтров с квантованными коэффициентами к АЧХ полуполосных фильтров, для которых  $\Delta = 0$ .

Масштабный множитель  $A$  варьируется в диапазоне  $0,5 < A \leq 1$ . Окончательное масштабирование фильтра может быть выполнено после решения поставленной задачи путем умножения полученных коэффициентов на множитель, равный степени двойки. Для определённости используем вариацию  $f_1$ . Диапазон изменения  $f_{1\min} \leq f_1 \leq f_{1\max}$  включает заданную номинальную частоту  $f_{1n}$  и определяется исходя из того, что выход за его пределы приводит к нарушению условия  $e \leq e_{\max}$ . Напомним, что параметр  $e$ , в отличие от  $\tilde{e}$ , соответствует неквантованным коэффициентам. Особенностью вариации  $A$  в сравнении с вариацией  $f_1$  является то, что задача ВЧА решается лишь для одного значения  $A$ .

Предполагается, что число сумматоров, заменяющих множители, соответствует представлению коэффициентов в каноническом знакорядном коде (КЗРК). Известно, что это число можно дополнительно уменьшить, если использовать технику исключения общих подвыражений (ИОП). Желательно технику ИОП включить в алгоритм поиска решения (1). Это может улучшить результат за счёт использования общих цепей сдвиг/суммирование для разных множителей в блоке. Минимум числа сумматоров  $\Sigma$  (КЗРК) не обязательно даёт минимум  $\Sigma$  (ИОП). Кроме того, может быть несколько решений с минимумом  $\Sigma$  (КЗРК), которым соответствуют разные значения  $\Sigma$  (ИОП). Проблеме поиска эффективных процедур ИОП посвящено большое число публикаций.

### Алгоритмы синтеза

Перебрать все подобласти в  $S$  без пропусков или повторов оценок  $\tilde{e}$  затруднительно. Некоторые возможные алгоритмы синтеза КИХ-фильтров без множителей с помощью ВИП упоминались в работе [1]. Применительно к полуполосным фильтрам можно предложить два других алгоритма. Общим для них является определение всех допустимых решений с  $\tilde{e} \leq e_{\max}$  при заданной длине слова коэффициентов  $M$  и последующий выбор решения с минимальным числом  $\Sigma$ . Если таких решений несколько, то

можно сохранить, например, то, для которого ошибка  $\tilde{e}$  минимальна или найденный блок умножения на сумматорах содержит наименьшее число этапов суммирования. Если допустимые решения отсутствуют, то значение  $M$  увеличивается на единицу и алгоритм повторяется.

Ниже приведены различающиеся части алгоритмов, необходимые для поиска допустимых решений.

**Алгоритм 1.** Варьируется параметр  $f_1$  в диапазоне  $f_{1\min} \leq f_1 \leq f_{1\max}$ . Шаг изменения  $f_1$  адаптируется так, чтобы перебрать все возможные решения в этом диапазоне для выбора из них допустимых вариантов с  $\tilde{e} \leq e_{\max}$ . Эта процедура выполняется для каждого значения  $A$  из диапазона  $0,5 < A \leq 1$  с шагом изменения  $q = 2^M$ .

**Алгоритм 2.** Варьируется параметр  $A$  в диапазоне  $0,5 < A \leq 1$ . Шаг изменения  $A$  адаптируется так, чтобы перебрать все возможные решения в этом диапазоне для выбора из них допустимых вариантов с  $\tilde{e} \leq e_{\max}$ . Эта процедура выполняется для каждого значения  $f_1$  из диапазона  $f_{1\min} \leq f_1 \leq f_{1\max}$  с шагом  $(f_{1\max} - f_{1\min})/K$ . Из-за специфики  $S(f_1, A)$  малое значение  $K$  может привести к пропуску искомого решения, а большое – к повторным вычислениям.

### Примеры синтеза

Ниже приведены два примера синтеза полуполосных КИХ-фильтров с помощью предложенных алгоритмов. Эти фильтры предназначены для цифровых широкополосных приёмников и были рассмотрены в работах [2, 3]. Условие (2) и процедура ИОП в работах [2, 3] не использовались.

*Пример 1.* Требования к полуполосному КИХ-фильтру нижних частот [2]:

$$20 \lg \tilde{e} \leq -80 \text{ дБ}; f_{1n} = 0, 1; N = 15.$$

В табл. 1 приведены результаты синтеза фильтра для различных значений длины слова коэффициентов  $M = 9..13$ . Здесь для каждого варианта решения даны координаты в области  $S(f_1, A)$ , максимальный коэффициент передачи  $\tilde{H}_m$ , ошибка  $\tilde{e}$ , отклонение  $\Delta$ , полное число сумматоров  $\Sigma$  в случае представления коэффициентов в КЗРК и после применения процедуры ИОП. Число  $\Sigma$  показано суммой двух чисел, первое из которых соответствует числу структурных сумматоров, а второе – полному числу сумматоров, заменяю-

Таблица 1. Результаты синтеза фильтра с  $N = 15$

Вариант	$M$	$f_i; A$	$\tilde{H}_m$	$20\lg \tilde{\epsilon}$ , дБ	$\Delta$ , %	$\Sigma$ (КЗРК)	$\Sigma$ (ИОП)
1	9	0,096; 0,8311	1,66	-79,45	4,1	16 = 8 + 8	13 = 8 + 5
2	10	0,096; 0,8203	1,64	-83,62	13,7	16 = 8 + 8	13 = 8 + 5
3	11	0,100; 0,7891	1,58	-86,44	2,1	19 = 8 + 11	14 = 8 + 6
4	12	0,099; 0,9058	1,81	-87,57	2	21 = 8 + 13	16 = 8 + 8
5	12	0,098; 0,9277	1,86	-84,89	1,8	15 = 8 + 7	13 = 8 + 5
6	12	0,098; 0,9282	1,86	-82,02	38,4	15 = 8 + 7	12 = 8 + 4
7	13	0,098; 0,8125	1,63	-85,62	4,9	16 = 8 + 8	15 = 8 + 7

Таблица 2. Результаты синтеза фильтра с  $N = 27$

Вариант	$M$	$f_i; A$	$\tilde{H}_m$	$20\lg \delta_2$ , дБ	$\Delta$ , %	$\Sigma$ (КЗРК)	$\Sigma$ (ИОП)
1	9	0,2; 1	2,01	-48,99	1,989	24 = 14 + 10	20 = 14 + 6
2	10	0,2; 0,5015	1,01	-48,20	0,018	23 = 14 + 9	20 = 14 + 6
3	10	0,2; 0,5621	1,13	-49,19	0,005	24 = 14 + 10	19 = 14 + 5
4	10	0,2; 0,6207	1,25	-50,00	0,259	24 = 14 + 10	20 = 14 + 6

щих блок умножения (см. рис. 1). Все варианты решений найдены с применением алгоритма 1. Вариант 4 характеризуется наименьшей ошибкой ( $20\lg \tilde{\epsilon} = -87,57$  дБ) из всех полученных решений при  $M = 9...12$ . Интересно, что для фильтра с неквантованными коэффициентами ошибка равна  $-89,37$  дБ.

Согласно табл. 1, минимальные  $\Sigma$ (КЗРК) = 15 найдены для вариантов 5 и 6, а минимальное  $\Sigma$ (ИОП) = 12 – для варианта 6. Заметим, что вариант 6 характеризуется наибольшим значением  $\Delta$  из всех вариантов в табл. 1. Разброс по  $\Delta$  очень велик даже при одном и том же значении  $M = 12$ .

Решение, полученное в работе [2] с помощью вариации коэффициентов при  $M = 14$ , совпадает с вариантом 7. Как видим, он уступает варианту 6 по  $\Sigma$ (КЗРК) на 1, а по  $\Sigma$ (ИОП) – на 3 сумматора. Решение для варианта 6 можно найти и с помощью более быстрого алгоритма 2, полагая в нём  $K = 10$ .

Для варианта 6 коэффициенты фильтра равны:  $b_0 = 3802q, b_1 = 2304q, b_3 = -512q, b_5 = 127q, b_7 = -18q$ . Здесь  $q = 2^{-12}$ . Соответствующий блок умножения на четырёх сумматорах для

выполнения пяти умножений показан на рис. 2. Утолщённая черта и указанное рядом число означают, что необходим сдвиг данных в соответствии с этим числом и инверсия знака, если это число отрицательное. Число  $-1$  указывает на необходимость только в инверсии знака. Узлы, помеченные номерами 0...7, соответствуют выходам умножителей на коэффициенты  $b_0...b_7$  на рис. 1. Таким образом, для данного фильтра блок из пяти умножителей можно выполнить на четырёх сумматорах. Три этапа суммирования определяют быстродействие этого блока.

Пример 2. Требования к полуполосному КИХ-фильтру нижних частот [3]:

$$\tilde{\delta}_2 \rightarrow \min; f_{1n} = 0,2; N = 27.$$

Для этого фильтра контролируется только ошибка в полосе задерживания. Фильтру с неквантованными коэффициентами соответствует  $20\lg \tilde{\delta}_2 = -51,32$  дБ. В табл. 2 приведены результаты синтеза фильтра для двух значений  $M$ . Все решения близки по значениям  $\tilde{\delta}_2$  и  $S$  и найдены с при-

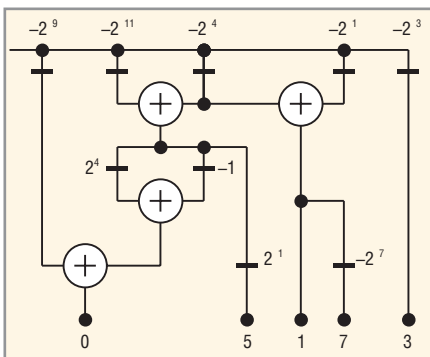


Рис. 2. Блок для выполнения пяти умножений

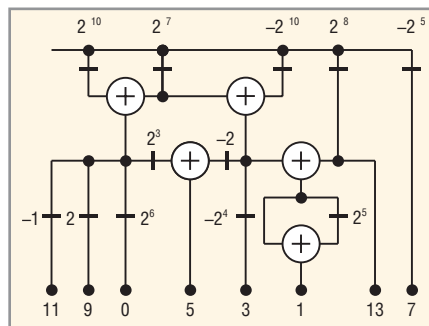


Рис. 3. Блок для выполнения восьми умножений

менением алгоритма 2 при  $K = 15$ . Как видим,  $f_1 = f_{1n} = 0,2$ , т.е. изменение в алгоритме  $f_1$  не даёт лучших результатов. Все варианты решений из табл. 2 были обнаружены и с помощью более медленного алгоритма 1.

Вариант 1 совпадает с решением, полученным в работе [3] при  $M = 10$ . Этот вариант уступает варианту 4 по величине ошибки  $\tilde{\delta}_2$  на 1 дБ, а варианту 3 – по  $\Sigma$ (ИОП) на 1 сумматор. Отметим, что вариант 3 характеризуется наименьшим значением  $\Delta$  из всех решений, представленных в табл. 2.

Для варианта 3 найденные коэффициенты равны:  $b_0 = 576q, b_1 = 363q, b_3 = -112q, b_5 = 58q, b_7 = -32q, b_9 = 18q, b_{11} = -9q, b_{13} = 4q$ . Здесь  $q = 2^{-10}$ . Соответствующий блок умножения на пяти сумматорах для выполнения восьми умножений показан на рис. 3. Три этапа суммирования определяют быстродействие этого блока. Быстродействие может быть увеличено введением буферных регистров между этапами суммирования, что относится и к блоку на рис. 2.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные алгоритмы позволяют улучшить известные решения в отношении полного числа сумматоров в структуре полуполосных КИХ-фильтров без умножителей. Полученные результаты можно, по-видимому, ещё дополнительно улучшить, поскольку алгоритмы не гарантируют нахождения глобального оптимума. Максимальное улучшение для рассмотренных примеров синтеза связано с уменьшением полного числа сумматоров ещё на 33% в фильтре с  $N = 15$  и на 26% – в фильтре с  $N = 27$ . В этом случае все коэффициенты должны быть равны числам степени два, и поэтому блоки умножения не должны содержать ни одного сумматора. Однако это вряд ли возможно.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Мингазин А.Т. Вариация исходных параметров взвешенной чебышевской аппроксимации в задаче синтеза КИХ-фильтров без умножителей. 7-я междунар. конф. «Цифровая обработка сигналов и ее применение». 2005. Т. 1. С. 54–56.
2. Chen C.-L., Willson A.N. A trellis search algorithm for the design of FIR filters with signed-powers-of-two coefficients. IEEE Trans. on CAS-II. 1999. V. 46. № 1. P. 29–39.
3. Sienski K., Legako M. Hardware efficient FIR filter structures from linear program design constraints. ICASSP. 1996. P. 1280–1282. ©